

ARBEITSMUSTER MIT AMS- \LaTeX

Bachelorarbeit

vorgelegt von
Nomen Nominandum

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

April 2007

Datum: 16. Dezember 2007.

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	1
1. Dreieckspunkte	2
2. Funktionen	2
3. Über $\wp(x)$	2
4. Die Pfaffsche Determinante	4
5. Universelle Eigenschaften	4
6. Elementare Zahlentheorie	4
Anhang A. Zu vertikalen Abständen und “neue Zeile”	5
Anhang B. Die Zeichen : und im Mathematik-Modus	5
Anhang C. Die Zeichen \perp $\langle \rangle$	6
Anhang D. Operatoren und Symbole	7
Literatur	8

VORWORT

Die \LaTeX -Datei (`diplom.tex`) dieser Vorlage dient als Muster für die \LaTeX -Datei einer Bachelor- oder Diplomarbeit. Sie soll als ein erstes Gerüst dafür dienen und eine Reihe typischer Beispiele zum Setzen von Mathematik mit \TeX enthalten. Ich habe vor, mit der Zeit mehr und mehr solcher Beispiele aufzunehmen¹.

Für Korrekturen, Ergänzungen und andere Vorschläge bin ich dankbar.

Bielefeld, Juni 2007

— M. Rost

¹Letzte Änderung: Siehe Datum links unten auf dem Deckblatt.

1. DREIECKSPUNKTE

Lemma 1.1. Für den Schwerpunkt G eines Dreiecks x_1, x_2, x_3 gilt

$$G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

Beweis. Der Beweis sei dem Leser überlassen. □

Bemerkung. Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Lemma 1.2. Der Schwerpunkt G , der Schnittpunkt H der Höhen und der Umkreismittelpunkt O eines Dreiecks liegen auf einer Geraden, der sog. Euler-Gerade. Es gilt

$$3G = 2O + H$$

Beweis. Siehe [1, Kapitel 99, Satz 567]. □

Satz 1.3 (Satz des Thales). Dreiecke, deren längste Seite der Durchmesser eines Kreises ist, sind genau dann rechtwinklig, wenn der dritte Punkt auf dem Bogen des Kreises liegt. □

2. FUNKTIONEN

Es sei

$$\begin{aligned} f: \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{C} \\ f(x) &= 3x + 5i \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \cdot 1 + 5i \\ &= 3 + 5i \\ f(0) &= 5i \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} (1) \quad & f'(x) = 3 \\ (2) \quad & f''(x) = 0 \end{aligned}$$

Wir erinnern an die bekannte Formel

$$(3) \quad e^{it} = \cos t + i \sin t \quad (\text{für } t \in \mathbf{C})$$

Die Formeln (1) und (3) werden im Folgenden benutzt.

3. ÜBER $\wp(x)$

Es sei p eine Primzahl und \mathbf{F}_p der Körper mit p Elementen. Für einen Körper K mit $\text{char } K = p$ ist

$$\begin{aligned} \wp: K &\rightarrow K \\ \wp(x) &= x^p - x \end{aligned}$$

eine additive Abbildung. Es gilt

$$\{x \in K \mid \wp(x) = 0\} = \mathbf{F}_p$$

3.1. Die opposite Algebra. Für eine Algebra A definiert man die Algebra A^{op} durch $A^{\text{op}} = A$ als additive Gruppe mit dem Produkt

$$\begin{aligned} A^{\text{op}} \times A^{\text{op}} &\rightarrow A^{\text{op}} \\ (x, y) &\mapsto yx \end{aligned}$$

3.2. Another example. To see $(h\Phi^{-1}\tau\Phi)^3 = \iota$ one observes first (with ij a permutation of 23)

$$\begin{aligned} h\Phi^{-1}\tau\Phi(\alpha_{01i}) &= h\Phi^{-1}(\alpha_{j10}) = h(\alpha_{1i0}) = \alpha_{0i1} \\ h\Phi^{-1}\tau\Phi(\alpha_{0i1}) &= h\Phi^{-1}(\alpha_{ji0}) = h(\alpha_{i10}) = \alpha_{i01} \end{aligned}$$

Next note that τ leaves every γ_{ijkl} fixed and therefore $\Phi^{-1}\tau\Phi$ leaves all elements α_{i0j} fixed. Hence

$$h\Phi^{-1}\tau\Phi(\alpha_{i01}) = h(\alpha_{i01}) = \alpha_{i10} = \alpha_{01i}^{-1}$$

This computation ist not related with the arguments used in [3].

3.3. The key lemma. Here it is:

Lemma 3.1. *Suppose $\dim X = 1$. Then*

$$\begin{aligned} F_*(\mathcal{O}_X - \Omega_{X/k}) &= \mathcal{O}_{X^{(p)}} - \Omega_{X^{(p)}/k} \\ F_*(\mathcal{O}_X + \Omega_{X/k}) &= p(\mathcal{O}_{X^{(p)}} + \Omega_{X^{(p)}/k}) \end{aligned}$$

If $p = 2$, then

$$2(F_*(\mathcal{O}_X) - 2\mathcal{O}_{X^{(2)}}) = \Omega_{X^{(2)}/k} - \mathcal{O}_{X^{(2)}}$$

and

$$F_*(F_*(\mathcal{O}_X) - 2\mathcal{O}_{X^{(2)}}) = F_*(\mathcal{O}_{X^{(2)}}) - 2\mathcal{O}_{X^{(4)}}$$

If p is odd, then

$$F_*(\mathcal{O}_X) - p\mathcal{O}_{X^{(p)}} = \frac{p-1}{2}(\Omega_{X^{(p)}/k} - \mathcal{O}_{X^{(p)}})$$

3.4. The Pedal Triangle. We will now consider the so-called *pedal triangle* construction. In [1, p. 16, ex. 12], one finds the following exercise:

Given a triangle ABC and a point P in its plane (but not on a side nor on the circumcircle), let $A_1B_1C_1$ be the derived triangle formed by the feet of the perpendiculars from P to the sides BC, CA, AB . Let $A_2B_2C_2$ be derived analogously from $A_1B_1C_1$ (using the same P), and $A_3B_3C_3$ from $A_2B_2C_2$. Then $A_3B_3C_3$ is directly similar to ABC . (Hint: $\angle PBA = \angle PA_1C_1 = \angle PC_2B_2 = \angle PB_3A_3$)

The following lemma gives a proof of this exercise. See also [2, Th. 2.51].

4. DIE PFAFFSCHE DETERMINANTE

Für eine Matrix $A \in M_{2m}(K)$ mit

$$A^t = -A$$

ist die *Pfaffsche Determinante*

$$\text{Pf}(A) \in K$$

gegeben durch

$$\text{Pf}(A) = \sum_{\sigma \in \Theta} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

Wir benutzen die äußere Algebra

$$\Lambda^\bullet V = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k V$$

5. UNIVERSELLE EIGENSCHAFTEN

Ein Diagramm zur einer universellen Eigenschaft:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow & & \parallel \\ V \otimes W & \xrightarrow{\exists! \bar{f}} & A \end{array}$$

Eine breite Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} & d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mn} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} & d_{m1} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix}$$

6. ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE

Ist p prim, so gilt

$$n^{(p-1)} \bmod p = \begin{cases} 0 & \text{falls } p \mid n \\ 1 & \text{falls } p \nmid n \end{cases}$$

Der größte gemeinsame Teiler von n und m wird mit $\text{ggT}(n, m)$ oder auch mit (n, m) bezeichnet.

ANHANG A. ZU VERTIKALEN ABSTÄNDEN UND “NEUE ZEILE”

Grundsätzlich soll man es T_EX überlassen, die richtigen vertikalen Abstände zu finden. Im normalen Text am besten kein “\vskip” verwenden.

Ferner ist es praktisch *verboten*, im Text eine neue Zeile mit “\” zu erzwingen. Dies sieht nicht gut aus. Stattdessen einfach eine Leerzeile benutzen.

Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text Text Text Text.

Neue Zeile nach “\”. Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text.

Neue Zeile nach Leerzeile. Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text Text
Text Text Text Text Text Text Text.

ANHANG B. DIE ZEICHEN : UND | IM MATHEMATIK-MODUS

Der Doppelpunkt tritt in der Mathematik zumeist bei Verhältnissen auf, beispielsweise bei

$$a : b = c : d$$

oder

$$(a : b : c) \in \mathbf{P}^2$$

Oder auch bei Definitionen

$$X := 1 + Y$$

In diesen Fällen erhält man die richtigen horizontalen Abstände mit einem normalen “:”. Bei Abbildungen

$$f : A \rightarrow B$$

verwendet man aber “\colon”.

Anders bei “|”: Bei $|x|$ (“Betrag von x ”) verwendet man “|”:

$$|x| = |y + z|$$

Übrigens, eine der wenigen Situationen, in denen man T_EX nachhelfen muß, ist

$$|x| = |-x|$$

Dies setzt man mit

$$|x| = \left| -x \right|$$

ansonsten bekommt man

$$|x| = | - x |$$

Für $n \mid m$ (“ n teilt m ”) verwende ich normalerweise “`\mid`” und nicht “`|`” ($n|m$). Dies ist logischer, denn “ n teilt m ” ist eine Relation. Es ist oft auch besser lesbar. Zum Vergleich:

$$4 \mid (2n + 1)^2 - 1$$

bzw.

$$4|(2n + 1)^2 - 1$$

Ausserdem passt es besser zum Zeichen $n \nmid m$ (“ n teilt nicht m ”). Dieses Zeichen bekommt man übrigens mit “`\nmid`” das nach

`\usepackage{amssymb}`

zur Verfügung steht.

Für “Mengenklammern”

$$A = \{ z \in B \mid z \notin C \}$$

verwende ich das Makro `\bmidb`, siehe `diplom.tex`.

ANHANG C. DIE ZEICHEN \perp \llcorner $\langle \rangle$

Für Orthogonalität

$$x \perp y \quad (\text{“}x \text{ ist orthogonal zu } y\text{”})$$

wird `\perp` verwendet, `\bot` gibt zu kleine Abstände ($x \perp y$). Für orthogonale Summen wie in

$$Z = U \perp V \perp W$$

verwende ich das Makro `\orth` (`=\mathbin\bot`, siehe `diplom.tex`).

$$\begin{array}{ll} V \perp W & V \bot W \\ V \perp W & V \orth W \\ V \perp W & V \perp W \end{array}$$

Die Zeichen $\langle \rangle$ sind für Größenrelationen wie

$$a \langle b \rangle c$$

gedacht und nicht für Klammern wie etwa beim Skalarprodukt. Mit `\langle x,y \rangle = \dots` bekommt man

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

was nun wirklich nicht gut aussieht.

Spitze Klammern im Mathematikmodus erhält man mit `\langle` und `\rangle`:

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

$$\langle\langle a_1, a_2, a_3 \rangle\rangle = \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \langle 1, -a_2 \rangle \otimes \langle 1, -a_3 \rangle$$

(Hier habe ich die Makros `\qform` und `\pfister` verwendet, siehe `diplom.tex`.)

ANHANG D. OPERATOREN UND SYMBOLE

Wie bei `\sin`, `\cos` verwendet man entsprechende Makros auch für `\det`, `\ker`, `\dim`, etc. und auch bei Bezeichnungen wie `\Hom`, `\End`, `\Aut`, `\Gal`, `\ggT`, etc.

$$\det f = \Lambda^n(f)$$

$$\ker f = \{ u \in V \mid f(u) = 0 \}$$

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$$

$$\text{End}(V) = \text{Hom}(V, V)$$

$$\text{Gal}(L/k) = \text{Aut}_k(L)$$

$$\text{ggT}(12, 18) = 6$$

`\det` und `\ker` sind schon vordefiniert, ansonsten benutzt man

```
\DeclareMathOperator{\Hom}{Hom}
```

zur Definition eines Makros. Für Beispiele siehe `diplom.tex`.

Mit `\DeclareMathOperator` bekommt man den richtigen Font (normalerweise nicht-kursiv) und die richtigen Abstände:

$$\textit{Hom}(L/k)$$

$$\text{Hom}(L/k)$$

$$\text{Hom}(L/k)$$

Hier wurde im ersten Fall einfach `\Hom(L/k)` geschrieben, was von T_EX als *H · o · m(L/k)* interpretiert wird; daher stimmen die Abstände nicht. Die beiden anderen Fälle wurden mit `\DeclareMathOperator` gesetzt.

Vorsicht:

$$\delta = g \otimes \text{id} - \text{id} \otimes g$$

$$\delta = g \otimes \text{id} - \text{id} \otimes g$$

Hier ist im ersten Fall `\text{id}` mit `\DeclareMathOperator` gesetzt und man bekommt falsche Abstände. Im zweiten Fall sind die Abstände richtig. Das bekommt man mit `\text{id}` oder mit `\mathrm{id}` (und so ist `\text{id}` auch in `diplom.tex` definiert).

LITERATUR

- [1] H. Coxeter, *Introduction to geometry*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1989, Reprint of the 1969 edition.
- [2] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Zeitlose Geometrie*, Klett Studienbücher Mathematik. [Klett Textbooks in Mathematics], Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1983, A translation of *Geometry revisited*, Translated from the English by Rolf Müller, Herbert Rauck and Hartmut Wellstein.
- [3] M. Rost, *Chain lemma for splitting fields of symbols*, Preprint, 1998.

Ich versichere hiermit, die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Nomen Nominandum

Bielefeld, 4. September 2007