Markus Rost

On norm varieties and characteristic numbers

The Bloch-Kato conjecture stats the bijectivity of the norm residue homomorphism

$$K_n^M k/p \longrightarrow H^n(k, \mu_p^{\otimes n}).$$

We reported about two topics in the current approach to this conjecture. One is **Hilbert's 90 for symbols:** Let $u = \{a_1, ..., a_n\} \mod p \in K_n^M k/p$ be a symbol and let

$$\varphi(u) := \bigoplus_{\substack{E|k \text{ finite} \\ u_E=0, E\subset\overline{k}}} E^* \xrightarrow{\mathcal{N}} k^*$$

be the norm map. Put

$$\mathcal{A}(u) := \varphi(u)/R - \text{trivial elements in } \ker \mathcal{N}.$$

Then **Hilbert's Theorem 90 for** u states that the induced map

$$\mathcal{A}(u) \xrightarrow{\overline{\mathcal{N}}} k^*$$

is injective.

Voevodsky has announced a theorem which essentially says that Hilbert's 90 for symbols implies the Bloch-Kato conjecture. One of the tools in proving Hilbert's 90 in the so called **Degree Formula**: Let $f : Y \to X$ be a morphism of projective smooth irreducible varieties (both of dimension d) over $k \subset \mathbb{C}$. Then the degree formula says the following:

$$[Y] = (\deg f) \cdot [X] \mod I_{d-1}(X).$$

Here $[X]$ denotes the complex cobordism class of $X(\mathbb{C})$, and $I_r(X) \subset MU_*$ is the ideal generated by all $[Z]$ with $Z \to X$ (defined over k) and $\dim Z \leq r$. Currently the proof of this formula relies on Voevodsky's stable homotopy theory.

J.-L. Colliot-Thélène

Rationale Punkte auf Varietäten, welche eine Schar Torseure abelscher Varietäten besitzen

In den letzten Jahren hat Swinnerton-Dyer, teilweise mit Hilfe anderer Autoren, eine Methode entwickelt, um das Bestehen (vieler) rationaler Punkte auf bestimmten Varietäten obiger Gestalt zu beweisen, allerdings unter zwei schweren Annahmen: Erstens, es gilt die sogenannte Schinzelsche Hypothese; zweitens, die Tate-Shafarevich Gruppen sind endlich. Vor kurzem hat Swinnerton-Dyer einen interessanten Fall entdeckt, wie man die Schinzelsche Hypothese gar nicht braucht. Es handelt sich um das Studium der $\mathbb{Q}$-rationalen Punkte auf diagonalen kubischen Flächen $ax^3 + by^3 + cz^3 + dr^3 = 0$.

Um eine grobe Idee der Methode zu geben, sei $X \to \mathbb{P}^1_k$ eine 1-parametrige Familie von Kurven vom Geschlecht Eins. Hier ist k ein Zahlkörper. Sei $K = k(\mathbb{P}^1)$ der Funktionenkpörper von $\mathbb{P}^1$. Sei J_K die Jacobische Varietät der geometrischen Faser X_K. Nehmen wir an, daß die Klasse von X_K in $H^1(K, J_K)$ die Ordnung zwei ist. Unter einer Annahme, die das Nichtbestehen eines Brauer-Maninschen Hindernisses gewährleistet $(X(\mathbb{A}_k)^{Br} \neq \emptyset)$ versucht man einen rationalen Punkt $P \in \mathbb{P}^1(k)$ zu finden, so daß die Faser X_P (glatt ist und) überall lokal rationale Punkte besitzt $(X_p(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset)$. Hier wird die Schinzelsche Hypothese benutzt. Man verlangt aber mehr: man will P so wählen, daß gleichzeitig die 2-Torsionsgruppe ${}_2\omega(J_P)$ (hier ist J_P die Jacobische Varietät von X_P) der Ordnung