9. Hopf und Pontryagin

Orientierungen

Orientierung für Vektorraum V:

Falls $\dim V > 0$:

- Äquivalenzklasse $\mathfrak{o} = [b_1, \dots, b_n]$ von geordneten Basen
- $(b_1, \dots, b_n) \sim (b_1', \dots, b_n')$ falls $b_i' = \sum_j a_{ij} b_j$, $\det(a_{ij}) > 0$.

Falls $\dim V = 0$: Vorzeichen ± 1

- $T \colon V \xrightarrow{\cong} W$ linearer Isomorphismus

  $\rightsquigarrow T(\mathfrak{o}) = [T(b_1), \dots, T(b_n)]$ **induzierte Orientierung**
- $\mathfrak{o}_{st} = [e_1, \dots, e_m]$ **Standardorientierung** von $\mathbb{R}^m \cong T_p\mathbb{R}^m$

Jeder Vektorraum hat genau zwei Orientierungen

Orientierungen

Orientierung für Mannigfaltigkeit M:

- Orientierungen $\mathfrak{o} = \{\mathfrak{o}_p\}_{p \in M}$ für T_pM
- $\exists$ C^∞ Atlas aus Karten $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$, so dass $d_p\varphi(\mathfrak{o}_p) = \mathfrak{o}_{st}$

M heißt...

- ...**orientierbar** falls eine Orientierung existiert
- ...**orientiert** falls eine Orientierung ausgezeichnet ist.

M orientierbar und zusammenhängend
$\rightsquigarrow$ es gibt genau zwei Orientierungen

Achtung! Nicht jede Mannigfaltigkeit ist orientierbar.

Randorientierungen

M orientierbar $\Longrightarrow \partial M$ orientierbar

Die "nach außen zuerst" Konvention:

Sei $(M, \mathfrak{o})$ gegeben, $\dim M = m$. Für $p \in \partial M$ wähle

- $v_1 \in T_p M$ nach außen gerichtet
- falls $m > 1$: $v_2, \ldots, v_m \in T_p \partial M$ mit $[v_1, v_2 \ldots, v_m] = \mathfrak{o}_p$

Definiere **Randorientierung** durch

- $(\partial \mathfrak{o})_p = [v_2, \ldots, v_m]$ falls $\dim M > 1$
- $(\partial \mathfrak{o})_p = \pm 1$ falls $\dim M = 1$ und $\mathfrak{o}_p = [\pm v_1]$

Achtung! Es sind verschiedene Konventionen im Umlauf.

Abbildungsgrad

- M, N orientiert, ohne Rand
- M kompakt, N zusammenhängend

Der **Abbildungsgrad** von $f\colon M \to N$ diff'bar ist

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \underbrace{\operatorname{sign}(d_p f)}_{\in \{\pm 1\}} \in \mathbb{Z}$$

wobei $q \in N$ regulärer Wert und $d_p f(\mathfrak{o}_p^M) = \operatorname{sign}(d_p f)\, \mathfrak{o}_{f(p)}^N$.

Erinnerung: Die regulären Wert liegen offen und dicht in N.

Der Satz von Hopf

Satz (Brouwer):

Der Abbildungsgrad $\deg(f)$ ist unabhängig von q und hängt nur von der Homotopieklasse von f ab.

Satz (Hopf):

Sei M eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit. Der Abbildungsgrad liefert eine Bijektion

$$\deg\colon [M, S^m]^\infty \xrightarrow{1:1} \mathbb{Z}, \quad m = \dim(M).$$

Insbesondere gilt $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ für $n \geq 1$.

Wir beweisen eine Verallgemeinerung des Satzes von Hopf, die gleichzeitig den Satz von Brouwer für $N = S^m$ enthält.

Ein Satz von Pontryagin

Der Satz von Pontryagin

Eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand heißt **geschlossen**.

Die **Kodimension** einer Untermannigfaltigkeit $S \subset M$ ist

$$\operatorname{codim}(S, M) = \dim(M) - \dim(S).$$

Satz (Pontryagin):

Für M geschlossen und $k \leq \dim M$ besteht eine 1:1 Korrespondenz zwischen $[M, S^k]$ und der Menge der *gerahmten Untermannigfaltigkeiten* von Kodimension k bis auf *gerahmten Kobordismus* in M.

$\rightsquigarrow$ Geometrische Interpretation der Homotpiemenge $[M, S^k]$

Zwei Konstruktionen

1. Konstruktion: Pontryagin Mannigfaltigkeiten

Sei $f\colon M \to S^k$ differenzierbar und $k \leq \dim M$.

Der **Satz vom regulären Wert** liefert:

Wahl 1: $q \in S^k$ ein regulärer Wert

$\rightsquigarrow$ $f^{-1}(q) \subset M$ Untermannigfaltigkeit von Kodimension k

$\rightsquigarrow$ $T_pM \cong T_pf^{-1}(q) \oplus N_p(f^{-1}(q), M)$ für alle $p \in f^{-1}(q)$

Es ist aber noch **mehr Struktur** vorhanden:

Wahl 2: $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ geordnete Basis von T_qS^k

- $d_pf\colon N_p(f^{-1}(q), M) \xrightarrow{\cong} T_qS^k$ Isomorphismus

$\rightsquigarrow$ diff'bare Familie geordneter Basen von $N_p(f^{-1}(q)M)$

$$f^*\mathfrak{b}(p) = \big((d_pf)^{-1}(b_1), \ldots, (d_pf)^{-1}(b_k)\big)$$

1. Konstruktion: Pontryagin Mannigfaltigkeiten

Wahl 1: $q \in S^k$ ein regulärer Wert:

$\rightsquigarrow$ $f^{-1}(q) \subset M$ Untermannigfaltigkeit von Kodimension k

$\rightsquigarrow$ $T_pM \cong T_pf^{-1}(q) \oplus N_p(f^{-1}(q), M)$ für alle $p \in f^{-1}(q)$

Wahl 2: $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ geordnete Basis von T_qS^k:

- $d_pf\colon N_p(f^{-1}(q), M) \xrightarrow{\cong} T_qS^k$ Isomorphismus

$\rightsquigarrow$ diff'bare Familie geordneter Basen von $N_p(f^{-1}(q)M)$

$$f^*\mathfrak{b}(p) = \big((d_pf)^{-1}(b_1), \ldots, (d_pf)^{-1}(b_k)\big)$$

Wir nennen das Tripel $(f, q, \mathfrak{b})$ **Pontryagin Daten** mit zugehöriger **Pontryagin Mannigfaltigkeit** $\big(f^{-1}(q), f^*\mathfrak{b}\big)$.

Gerahmte Untermannigfaltigkeiten

Eine **Rahmung** für eine Untermannigfaltigkeit $S \subset M$ ist eine diff'bare Abbildung, die jedem $p \in S$ eine geordnete Basis

$$\mathfrak{v}(p) = \big(v_1(p), \ldots, v_k(p)\big) \in \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{k \text{ mal}}$$

für den Normalenraum $N_p(S, M) \subset T_pM$ zuordnet.

$(S, \mathfrak{v})$ heißt eine **gerahmte Untermannigfaltigkeit** von M.

Beobachtung: Eine Rahmung $\mathfrak{v}$ liefert einen Diffeomorphismus

$$S \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\cong} N(S, M), \quad (p, \xi) \mapsto \sum \xi_i \, v_i(p).$$

2. Konstruktion: Potryagin Kollapsabbildungen

Seien nun:

- M eine geschlossene Mannigfaltigkeit
- $(S, \mathfrak{v})$ eine gerahmte Untermannigfaltigkeit, S geschlossen

Wahl 1: parametrisierte Tube $N(S, M; 1) \hookrightarrow M$

$\rightsquigarrow$ erhalten eine Einbettung

$$\vartheta \colon S \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\cong} N(S, M) \hookrightarrow N(S, M; 1) \hookrightarrow M.$$

Wahl 2: $\kappa \colon \mathbb{R}^k \to S^k$ diff'bar, so dass:

- $\kappa(x) = s_\infty$ für $|x| \geq 1$, Basispunkt $s_\infty \in S^k$
- κ bildet den offenen Einheitsball diffeomorph auf $S^k \setminus s_\infty$ ab

$\rightsquigarrow$ $q_0 = \kappa(0)$ regulärer Wert von $\pi \colon S \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{pr} \mathbb{R}^k \xrightarrow{\kappa} S^k$

$\mathfrak{b}_0$ Basis von $T_{q_0} S^k$ gegeben durch $d_0\kappa(e_i)$

2. Konstruktion: Potryagin Kollapsabbildungen

Mit diesen Wahlen definieren wir $f\colon M \to S^k$ durch

$$f(p) = \begin{cases} \pi(\vartheta^{-1}(p)), & \text{falls } p \in \vartheta(S \times \mathbb{R}^k) \\ s_\infty, & \text{falls } p \notin \vartheta(S \times \mathbb{R}^k). \end{cases}$$

Wir nennen f eine **Pontryagin Kollapsabbildung**.

Per Konstruktion:
f ist differenzierbar mit Pontryagin Mannigfaltigkeit

$$\left(f^{-1}(q_0), f^*\mathfrak{b}_0\right) = (S, \mathfrak{v}).$$

Gerahmte Kobordismen

Gerahmte Kobordismen

- M Mannigfaltigkeit ohne Rand
- $S_0, S_1 \subset M$ geschlossene Untermannigfaltigkeiten

S_0 und S_1 heißen **kobordant** in M falls die Teilmenge

$$S_0 \times [0, \epsilon) \amalg S_1 \times (1 - \epsilon, 1] \subset M \times [0, 1]$$

zu einer kompakten Untermannigfaltigkeit $W \subset M \times [0, 1]$, genannt **Kobordismus**, fortgesetzt werden kann, so dass

$$\partial W = S_0 \times \{0\} \amalg S_1 \times \{1\}$$

und $W \setminus \partial W \subset M \times (0, 1)$.

Klar: Kobordismus ist eine Äquivalenzrelation.

Gerahmte Kobordismen

- M Mannigfaltigkeit ohne Rand
- $S_0, S_1 \subset M$ geschlossene Untermannigfaltigkeiten
- $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{v}_1$ Rahmungen von S_0 und S_1

$(S_0, \mathfrak{v}_0)$ und $(S_1, \mathfrak{v}_1)$ heißen **gerahmt kobordant** in M es einen Kobordismus $W \subset M \times [0, 1]$ zwischen S_0 und S_1 gibt und eine Rahmung $\mathfrak{w}$ von W, so dass

$$w_i(p,t) = \begin{cases} (v_{0,i}(p), 0), & \text{für } (p,t) \in S_0 \times [0, \epsilon) \\ (v_{1,i}(p), 0), & \text{für } (p,t) \in S_1 \times (1-\epsilon, 1]. \end{cases}$$

Das Paar $(W, \mathfrak{w})$ heißt **gerahmter Kobordismus**.

Gerahmter Kobordismus ist ebenfalls eine Äquivalenzrelation.

Pontryagin Mannigfaltigkeiten und Homotopien

Gegeben seien:

- $F\colon M \times [0,1] \to S^k$ Einschr. einer diff'baren Homotopie
- $q \in S^k$ regulärer Wert von F, $f = F(\cdot, 0)$ und $g = F(\cdot, 1)$
- $\mathfrak{b}$ orientierte Basis von $T_q S^k$

$(F^{-1}(q), F^*\mathfrak{b})$ ist eine gerahmte Untermannigfaltigkeit mit Rand von $M \times [0,1]$. Für $\epsilon > 0$ klein gilt

$$F^{-1}(q) \cap \big(M \times [0,\epsilon)\big) = f^{-1}(q) \times [0,\epsilon)$$
$$F^{-1}(q) \cap \big(M \times (1-\epsilon,1]\big) = g^{-1}(q) \times (1-\epsilon,1]$$

und die Rahmung $F^*\mathfrak{b}$ stimmt nahe $f^{-1}(q) \times 0$ und $g^{-1}(q) \times 1$ mit $f^*\mathfrak{b}$ und $g^*\mathfrak{b}$ überein.

Insbesondere: $(F^{-1}(q), F^*\mathfrak{b})$ ist ein gerahmter Kobordismus zwischen $(f^{-1}(q), f^*\mathfrak{b})$ und $(g^{-1}(q), g^*\mathfrak{b})$.

Der Beweis des Satzes von Pontryagin

Und nochmal der Satz von Pontryagin

Sei $\mathrm{Bord}_k^{\mathrm{fr}}(M)$ die Menge der gerahmten Kobordismusklassen gerahmter Untermannigfaltigkeiten von M mit Kodimension k.

Bereits bekannt:

- $[M, S^k] \cong [M, S^k]^\infty$ durch differenzierbare Approximation
- Der Satz von Pontryagin besagt also im wesentlichen:

Satz (Pontryagin)

Sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit. Die Konstruktionen von Pontryagin Mannigfaltigkeiten und Kollapsabbildungen liefern für $k \leq \dim M$ inverse Bijektionen

$$[M, S^k]^\infty \xleftrightarrow{1:1} \mathrm{Bord}_k^{\mathrm{fr}}(M).$$

Der Satz von Pontryagin in drei Schritten

Der **Satz von Pontryagin** folgt also aus:

Satz A

Seien $(f, q, \mathfrak{b})$ und $(g, q', \mathfrak{b}')$ Pontryagin Daten auf M, wobei f und g diff'bar homotop sind. Dann sind $\left(f^{-1}(q), f^*\mathfrak{b}\right)$ und $\left(g^{-1}(q'), g^*\mathfrak{b}'\right)$ gerahmt kobordant in M.

Satz B

$f, g \colon M \to S^k$ sind genau dann diff'bar homotop wenn ihre Pontryagin Mannigfaltigkeiten in M gerahmt kobordant sind.

Satz C

Jede gerahmte Untermannigfaltigkeit von M ist die Pontryagin Mannigfaltigkeit einer Abbildung $M \to S^k$.

Beweis von Satz C

Satz C

Jede gerahmte Untermannigfaltigkeit von M ist die Pontryagin Mannigfaltigkeit einer Abbildung $M \to S^k$.

Bereits gezeigt. Jede gerahmte Mannigfaltigkeit ist Pontryagin Mannigfaltigkeit einer Kollapsabbildung.

Beweis von Satz A

Satz A

Seien $(f, q, \mathfrak{b})$ und $(g, q', \mathfrak{b}')$ Pontryagin Daten auf M, wobei f und g diff'bar homotop sind. Dann sind

$$\big(f^{-1}(q), f^*\mathfrak{b}\big) \quad \text{und} \quad \big(g^{-1}(q'), g^*\mathfrak{b}'\big)$$

gerahmt kobordant in M.

Für den **Beweis** variieren wir einzelne Parameter:

- zuerst die Basis
- dann den regulären Wert
- und schließlich die Abbildung.

Änderung der Basis

Lemma 1

Seien f und q fest. Für orientierte Basen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ von T_qS^k sind

$$(f^{-1}(q), f^*\mathfrak{b}) \quad \text{und} \quad (f^{-1}(q), f^*\mathfrak{b}')$$

gerahmt kobordant in M

Beweis:

- Der Raum der orientierten Basen von T_qS^k ist zusammenhängend, da homöomorph zu $GL_+(k, \mathbb{R})$.
- $\rightsquigarrow$ Wähle diff'baren Weg $t \mapsto \mathfrak{b}_t$, konstant nahe 0 und 1 mit $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}'$.
- $\rightsquigarrow$ Betrachte den Kobordismus $f^{-1}(q) \times [0, 1]$ mit der Rahmung $\mathfrak{w}(p, t) = f^*\mathfrak{b}_t(p)$.

Änderung des regulären Wertes

Lemma 2

Seien $(f, q, \mathfrak{b})$ und $(f, q', \mathfrak{b}')$ Pontryagin Daten mit festem f und $|q - q'| \leq \epsilon$. Für hinreichend kleines ϵ sind

$$(f^{-1}(q), f^*\mathfrak{b}) \quad \text{und} \quad (f^{-1}(q'), f^*\mathfrak{b}')$$

gerahmt kobordant in M

- Die Menge der regulären Werte ist offen, da M kompakt ist.

$\rightsquigarrow$ q hat ϵ Umgebung bestehend aus regulären Werten.

- Wähle Familie von Drehungen D_t, diff'bar in t, konstant nahe 0 und 1 mit

$$D_0 = \mathrm{id}, \quad D_1(q) = q' \quad \text{und} \quad |D_t(q) - q| < \epsilon.$$

Änderung des regulären Wertes

Lemma 2

Seien $(f, q, \mathfrak{b})$ und $(f, q', \mathfrak{b}')$ Pontryagin Daten mit festem f und $|q - q'| \leq \epsilon$. Für hinreichend kleines ϵ sind

$$(f^{-1}(q), f^*\mathfrak{b}) \quad \text{und} \quad (f^{-1}(q), f^*\mathfrak{b}')$$

gerahmt kobordant in M

$\rightsquigarrow$ $F(p, t) = D_t(f(p))$ diff'bare Homotopie, q' regulärer Wert von $F\colon M \times [0,1] \to S^k$.

- $F^{-1}(q') \subset M \times [0,1]$ gerahmter Kobordismus zwischen

$$(D_0 \circ f)^{-1}(q') = f^{-1}(q') \quad \text{und}$$
$$(D_1 \circ f)^{-1}(q') = f^{-1}(D_1^{-1}(q')) = f^{-1}(q).$$

Änderung der Abbildung

Lemma 3

Seien $(f, q, \mathfrak{b})$ und $(g, q, \mathfrak{b}')$ Pontryagin Daten mit diff'bar homotopen $f, g\colon M \to S^k$ und gemeinsamem regulären Wert q.

$$(f^{-1}(q), f^*\mathfrak{b}) \quad \text{und} \quad (g^{-1}(q), f^*\mathfrak{b}')$$

sind gerahmt kobordant in M

- $F\colon M \times [0,1] \to S^k$ die Einschr. einer diff'baren Homotopie.
- $U \subset S^k$ Umgebung von q aus gemeinsamen reg. Werten.

$\rightsquigarrow$ $f^{-1}(q')$ und $g^{-1}(q')$ gerahmt kobordant zu $f^{-1}(q)$ und $g^{-1}(q)$ für alle $q' \in U$ nach Lemma 2.

- U enthält auch einen regulären Wert q' von F.

$\rightsquigarrow$ $f^{-1}(q')$ und $g^{-1}(q')$ gerahmt kobordant via $F^{-1}(q')$

Beweis von Satz A (Ende)

Satz A

Seien $(f, q, \mathfrak{b})$ und $(g, q', \mathfrak{b}')$ Pontryagin Daten auf M, wobei f und g diff'bar homotop sind. Dann sind

$$\left(f^{-1}(q), f^*\mathfrak{b}\right) \quad \text{und} \quad \left(g^{-1}(q'), g^*\mathfrak{b}'\right)$$

gerahmt kobordant in M.

- $F\colon M \times [0,1] \to S^k$ diff'bare Homotopie von f nach g
- D_t diff'bare Familie von Drehungen mit $D_0 = \mathrm{id}$ und $D_1(q) = q'$
- OBdA q' regulärer Wert von F.

$\rightsquigarrow$ $G(p,t) = D_t(F(p,t))$ Homotopie, $G^{-1}(q')$ gesuchter Kobordismus.

Beweis von Satz B

Satz B

$f, g \colon M \to S^k$ sind genau dann diff'bar homotop wenn ihre Pontryagin Mannigfaltigkeiten in M gerahmt kobordant sind.

Bereits bekannt:

- f, g diff'bar homotop $\rightsquigarrow$ Pontr. Mfkt'en kobordant (folgt aus Satz A und den vorherigen Konstruktionen)
- $(S, \mathfrak{v})$, $(S', \mathfrak{v}')$ gerahmt kobordant via $(W, \mathfrak{w})$

$\rightsquigarrow$ Kollapskonstruktion liefert Homotopie $F \colon M \times [0, 1] \to S^k$ zwischen den Kollapsabbildungen mit Pontryagin Mannigfaltigkeit $(W, \mathfrak{w})$.

Was noch fehlt:

Lemma 4

Falls $\left(f^{-1}(q), f^*\mathfrak{b}\right) = \left(g^{-1}(q), g^*\mathfrak{b}\right)$, so gilt $f \sim_\infty g$.

Beweis von Satz B modulo Lemma 4

Satz B

$f, g\colon M \to S^k$ sind genau dann diff'bar homotop wenn ihre Pontryagin Mannigfaltigkeiten in M gerahmt kobordant sind.

Lemma 4

Falls $\big(f^{-1}(q), f^*\mathfrak{b}\big) = \big(g^{-1}(q), g^*\mathfrak{b}\big)$, so gilt $f \sim_\infty g$.

- $(W, \mathfrak{w})$ gerahmter Kobordismus zwischen $f^{-1}(q)$ und $g^{-1}(q)$
- $F\colon M \times [0,1] \to S^k$ Kollapshomotopie für $(W, \mathfrak{w})$

$\rightsquigarrow$ F_0 und F_1 haben identische Pontr. Mfkt'en mit f und g

$\rightsquigarrow$ Mit Lemma 4: $f \sim_\infty F_0 \sim_\infty F_1 \sim_\infty g$.

- Beweis von Lemma 4 $\rightsquigarrow$ nachzulesen bei Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*

Von Pontryagin zu Hopf

Satz (Hopf):

Sei M eine geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeit. Der Abbildungsgrad liefert eine Bijektion

$$\deg\colon [M, S^m]^\infty \xrightarrow{1:1} \mathbb{Z}, \quad m = \dim(M).$$

Vorüberlegungen:

- Der Satz von Pontryagin liefert eine Bijektion
$$[M, S^m]^\infty \cong \mathrm{Bord}_m^{\mathrm{fr}}(M).$$
- $\mathrm{Bord}_m^{\mathrm{fr}}(M)$ besteht aus gerahmten, 0–dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von M, also endlichen Mengen.
- Eine Rahmung für eine einpunktige Untermannigfaltigkeit $\{p\} \subset M$ ist eine Basis für T_pM

Der Abbildungsgrad aus einer anderen Perspektive

- Sei $[S, \mathfrak{v}] = \big[(p_1, \mathfrak{v}_1), \ldots, (p_r, \mathfrak{v}_r)\big] \in \mathrm{Bord}^{\mathrm{fr}}_m(M)$ dargestellt durch Punkte $p_i \in M$ und geordnete Basen $\mathfrak{v}_i$ von $T_{p_i}M$.
- Je nachdem, ob $\mathfrak{v}_i$ positiv oder negativ orientiert ist definieren wir $mathrmsign(p_i, \mathfrak{v}_i) = \pm 1$.

$\rightsquigarrow$ Wir können also Punkte mit Vorzeichen zu zählen:

$$\#(S, \mathfrak{v}) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{sign}(p_i, \mathfrak{v}_i) \in \mathbb{Z}$$

Beobachtung: Sei $f\colon M \to S^m$ diff'bar, $q \in S^m$ ein regulärer Wert und $\mathfrak{b}$ eine orientierte Basis von T_qS^m. Dann gilt

$$\deg(f) = \#[f^{-1}(q), f^*\mathfrak{b}].$$

Der Satz von Hopf reduziert sich daher auf folgende Aussage:

Lemma

Die “Zählen mit Vorzeichen” Abbildung

$$\#\colon \mathrm{Bord}^{\mathrm{fr}}_m(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ist wohldefiniert und eine Bijektion.

Der Beweis benötigt ein weiteres Resultat:

Satz (Klassifikation 1-dimensionaler Mannigfaltigkeiten)

Jede zusammenhängende, eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ist diffeomorph zu S^1 oder zu einem Intervall.

Insbesondere besteht jede kompakte, eindimensionale Mannigfaltigkeit aus endlich vielen diffeomorphen Kopien von S^1 und $[0, 1]$.

Wohldefiniertheit von $\#\colon \mathrm{Bord}_m^{\mathrm{fr}}(M) \to \mathbb{Z}$

- Seien $(S_0, \mathfrak{v}_0)$ und (S_1, v_1) kobordant in M via $(W, \mathfrak{w})$.
- Versehe $M \times [0,1]$ mit der Produktorientierung und $\partial(M \times [0,1])$ mit der Randorientierung.

$\rightsquigarrow$ **Beobachtung:** eine Identifikation $M \cong M \times 0$ und $M \cong M \times 1$ erhält Orientierungen, die andere nicht.

- W besteht aus endliche vielen eingebetteten Kreisen und Intervallen mit Randpunkten in $M \times \{0,1\}$.
- **Überlegung:** Für jedes Intervall von W haben die gerahmten Endpunkte verschiedene Vorzeichen bezügliche der Randorientierung auf $M \times \{0,1\}$

$\rightsquigarrow$ Durch Vergleich der Orientierungen erhält man
$0 = \#(\partial W, \mathfrak{w}|_{\partial W}) = \pm\#(S_0, \mathfrak{v}_0) \mp \#(S_1, \mathfrak{v}_1)$
also insbesondere $\#(S_0, \mathfrak{v}_0) = \#(S_1, \mathfrak{v}_1)$.

Bijektivität von $\#\colon \mathrm{Bord}_m^{\mathrm{fr}}(M) \to \mathbb{Z}$

Surjektivität:

- Für $k \in \mathbb{Z}$ wähle $|k|$ Punkte mit positiv (bzw. negativ) orientierten Basen falls $k \geq 0$ (bzw. $k < 0$).

Inkjektivität:

- Jedes Element $\mathrm{Bord}_m^{\mathrm{fr}}(M)$ hat einen Repräsentanten $(S, \mathfrak{v})$ mit
$$\#(S, \mathfrak{v}) = \pm|S| \quad (|S| = \text{Kardinalität}).$$
- Je zwei solche Repräsentanten sind gerahmt kobordant.

Weiterführende Lektüre

Weiterführende Lektüre

Differentialtopologie für Fortgeschrittene:

- Wall, *Differential Topology*
- Hirsch, *Differential Topology*
- Golubitsky, Guillemin: *Stable Mappings and Their Singularities*

Differentialtopologie und algebraische Topologie:

- Bredon: *Geometry and Topology*
- Milnor: *Lectures on the h-cobordism theorem*
- Kochman: *Bordism, Stable Homotopy and Adams Spectral Sequences*

Niedrigdimensionale Topologie:

- Scorpan: *The Wild World of 4–Manifolds*

The End.

Vielen Dank für's Zuhören!

Viel Spaß beim weiteren Entdecken der Welt der Mannigfaltigkeiten!