Differentialtopologie

— Übungsblatt 2 —

Wintersemester 2019/2020

(Abgabe am 21.10.2019)

Aufgabe 2.1 (Reguläre lokale Nullstellenmengen)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k–dimensionale reguläre lokale Nullstellenmenge (siehe Definition 1.1). Zeigen Sie, dass die im Beweis von Satz 1.2 konstruierten Karten von M einen differenzierbaren Atlas für M bilden und folglich eine differenzierbare Struktur auf M festlegen.

Aufgabe 2.2 (Sphären)**.** Die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist per Definition die Nullstellenmenge der Funktion $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) = |x|^2 - 1 = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass $DF(p)$ für alle $p \in S^n$ surjektiv ist.

(b) Teil (a) und Aufgabe 2.1 liefern eine differenzierbare Struktur auf S^n. Zeigen Sie, dass diese mit der Standardstruktur aus der Vorlesung übereinstimmt.

Aufgabe 2.3 (Ein Bauprinzip für differenzierbare Abbildungen)**.** Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\{\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to U'_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ein differenzierbarer Atlas von M und $\{\psi_\gamma\colon V_\gamma \to V'_\gamma\}_{\gamma\in C}$ ein solcher für N. Für die Kartenwechsel schreiben wir kurz

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \quad \text{und} \quad \psi_{\gamma\delta} = \psi_\gamma \circ \psi_\delta^{-1}.$$

Ferner seien für alle $\beta \in A$ und $\delta \in C$ differenzierbare Abbildungen (im klassischen Sinn) $f_{\gamma\alpha}\colon U'_\alpha \to V'_\gamma$ gegeben, so dass die “Verklebebedingung”

$$\psi_{\delta\gamma} \circ f_{\gamma\alpha} \circ \varphi_{\alpha\beta} = f_{\delta\beta} \quad \text{für alle } \alpha,\beta \in A \text{ und } \gamma,\delta \in C \tag{1}$$

erfüllt ist wann immer die Kompositionen definiert sind.

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $\psi_{\delta\gamma} \circ f_{\gamma\alpha} \circ \varphi_{\alpha\beta}$.

(b) Zeigen Sie, dass es genau eine differenzierbare Abbildung $f\colon M \to N$ (im neuen Sinn) gibt, so dass die Kartendarstellungen von f bezüglich der gegebenen Atlanten genau die Abbildungen $f_{\gamma\alpha}$ sind. Das heißt, es gilt $f_{\gamma\alpha} = \psi_\gamma \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ für alle $\alpha \in A$ und $\gamma \in C$.