# Differentialtopologie

## — Übungsblatt 3 —

Wintersemester 2019/2020

(Abgabe am 28.10.2019)

**Aufgabe 3.1** (Zur Definition von Immersionen)**.** Nach Definition 3.1 ist $f\colon M \to N$ eine Immersion falls *alle* Kartendarstellungen von $f$ überall injektive Ableitungen haben. Zeigen Sie, dass es ausreicht, *um jeden Punkt eine* Kartendarstellung zu betrachten.

**Aufgabe 3.2** (Tori und Perioden)**.** Sei $q_n\colon \mathbb{R}^n \to T^n = (S^1)^n$ gegeben durch

$$q_n(\theta_1, \dots, \theta_n) = \big((\cos\theta_1, \sin\theta_1), \dots, (\cos\theta_n, \sin\theta_n)\big).$$

Ferner sei $M$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n, M)$ die Menge der differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R}^n \to M$, die in jeder Variable $2\pi$ periodisch sind.

(a) Zeigen Sie, dass $q_n$ eine differenzierbar ist. Folgern Sie, dass durch $f \mapsto f \circ q_n$ eine Abbildung $C^\infty(T^n, M) \to C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n, M)$ gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $C^\infty(T^n, M) \to C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n, M)$ aus (a) bijektiv ist und Immersionen auf Immersionen abbildet. Anders gesagt: für jedes $\tilde{f} \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n, M)$ gibt es genau ein $f \in C^\infty(T^n, M)$ mit $\tilde{f} = f \circ q_n$ und $\tilde{f}$ ist genau dann eine Immersion wenn dies für $f$ der Fall ist.

(c) Zeigen Sie, dass für $0 < r < R$ die Abbildung

$$\tilde{\iota}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \tilde{\iota}(\varphi, \theta) = \big((R + r\cos\theta)\cos\varphi,\ (R + r\cos\theta)\sin\varphi,\ \sin\theta\big)$$

eine Einbettung $\iota\colon T^2 \to \mathbb{R}^3$ induziert. Veranschaulichen Sie das Bild von $\iota$.

**Aufgabe 3.3** (Eine Einbettung?)**.** Konstruieren Sie eine injektive differenzierbare Abbildung $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$, deren Bild das Quadrat $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid \max |x|, |y| = 1\}$ ist. Kann eine solche Abbildung eine differenzierbare Einbettung sein?