Differentialtopologie

— Übungsblatt 4 —

Wintersemester 2019/2020

(Abgabe am 4.11.2019)

Aufgabe 4.1 ($\mathbb{R}P^2$ eingebettet)**.** Jeder Punkt in $\mathbb{R}P^2$ lässt sich bekanntermaßen in homogenen Koordinaten $[x_1 : x_2 : x_3]$ mit $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$ darstellen. Zeigen Sie, dass durch

$$f\colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4, \quad [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2)$$

eine wohldefinierte Abbildung beschrieben wird, und dass diese eine differenzierbare Einbettung ist. Können Sie allgemeiner eine Einbettung $\mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}^N$ für beliebiges n und ein entsprechendes N angeben?

Aufgabe 4.2 (Immersionen und Einbettungen)**.** Sei $f\colon M \to N$ differenzierbar mit injektiver lokaler Ableitung in einem Punkt $p \in M$. Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $U \subset M$ von p gibt, so dass $f|_U\colon U \to N$ eine differenzierbare Einbettung ist.

Aufgabe 4.3 (Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$)**.** Aus der Vorlesung wurde ein Beweis dafür skizziert, dass für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) M ist eine k–dimensionale reguläre lokale Nullstellenmenge (siehe Definition 1.1).

(ii) M ist eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit (siehe Definition 3.3).

Beweisen Sie die Aussage im Detail.