Differentialtopologie

— Übungsblatt 6 —

Wintersemester 2019/2020

(Abgabe am 18.11.2019)

Achtung! *Die Aufgaben sind dieses Mal etwas umfangreicher. Man sollte sich bei der Bearbeitung auf einige Teilaspekte konzentrieren und den Rest nur zur Kenntnis nehmen.*

Aufgabe 6.1 (Die kompakt–offen Topologie)**.** Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Die *kompakt–offen Topologie* auf der Menge $C(M,N)$ der stetigen Abbildungen wird erzeugt von den Mengen

$$\mathcal{U}(K,O) = \{f \in C(M,N) \mid f(K) \subset U\}$$

wobei $K \subset M$ kompakt und $O \subset N$ offen ist.

(a) Sei M kompakt und die Topologie auf N sei durch eine Metrik d_N induziert (z.B. über eine Einbettung in $\mathbb{R}^k$). Zeigen Sie, dass durch

$$d(f,g) = \max_{p \in M} d_N\big(f(p), g(p)\big), \quad f, g \in C(M,N)$$

eine Metrik auf $C(M,N)$ gegeben ist, die die kompakt–offen Topologie induziert.

(b) Folgern Sie aus dem Beweis von Satz 4.5, dass jedes $f \in C(M,N)$ eine offene Umgebung U_f besitzt, so dass jedes $g \in U_f$ homotop zu f ist, und dass $C^\infty(M,N)$ dicht in $C(M,N)$ liegt.

Aufgabe 6.2 (Homotopiegruppen)**.** Sei $(M, *_M)$ ein punktierte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für $n \geq 1$ betrachten die abgeschlossenen Teilmengen

$$A = \mathbb{R}^n \setminus (0,1)^n \quad \text{und} \quad A_\epsilon = \mathbb{R}^n \setminus (\epsilon, 1-\epsilon)^n, \quad 0 < \epsilon < 1/2.$$

und definieren

$$\begin{aligned} C^\infty_A(\mathbb{R}^n, M) &= \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, M) \mid f(A_\epsilon) = *_M \text{ für ein } \epsilon > 0\} \quad \text{und} \\ \pi^\infty_n(M) &= C^\infty_A(\mathbb{R}^n, M) / \sim_A \end{aligned}$$

wobei $f \sim_A g$ wenn es eine differenzierbare Homotopie $H \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to M$ gibt, so dass $H(a,t) = H(a,0)$ für alle $a \in A$ gilt. Für $f, g \in C^\infty_A(\mathbb{R}^n, M)$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ definieren wir die *Verkettung in der iten Komponente* $f *_i g \colon \mathbb{R}^n \to M$ durch

$$f *_i g(t_1, \ldots, t_n) := \begin{cases} f(t_1, \ldots, 2t_i, \ldots, t_n), & t_i \leq 1/2 \\ g(t_1, \ldots, 2t_i - 1, \ldots, t_n), & t_i \geq 1/2 \end{cases}$$

sowie die *Umkehrung in der iten Komponente* $f_i^{\mathrm{rev}} \colon \mathbb{R}^n \to M$ durch

$$f_i^{\mathrm{rev}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, 1 - t_i, \ldots t_n).$$

(a) Zeigen Sie, dass $f *_i g$ und f_i^{rev} Elemente von $C_A^\infty(\mathbb{R}^n, M)$ sind, und dass

$$f *_i f_i^{\mathrm{rev}} \sim_A c \quad \text{und} \quad f *_i g \sim_A f *_j g \quad \text{für } i \neq j$$

wobei $c\colon \mathbb{R}^n \to M$ die konstante Abbildung $c \equiv *_M$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Verkettungen $*_i$ eine wohldefinierte Operation

$$*\colon \pi_n^\infty(M) \times \pi_n^\infty(M) \to \pi_n^\infty(M)$$

induziert, die $\pi_n^\infty(M)$ zu einer Gruppe macht.

(c) Zeigen Sie, dass $\pi_n^\infty(M)$ für $n \geq 2$ eine Abelsche Gruppe ist.

(d) Konstruieren Sie eine Bijektion $\pi_n^\infty(M) \cong [S^n, M]_0^\infty \cong \pi_n(M)$.

(Hinweis: Sie dürfen das Eckmann–Hilton Argument benutzen. Für Teil (d) sollten Sie zunächst punktierte Abbildungen $f\colon S^n \to M$ durch homotope Abbildungen approximieren, die nahe dem Nordpol konstant $*_M$ sind und dann mit der stereographischen Projektion arbeiten.)