Differentialtopologie

— Übungsblatt 7 —

Wintersemester 2019/2020

(Abgabe am 25.11.2019)

Aufgabe 7.1. Finden Sie für $p \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ einen expliziten Isomorphismus

$$T_p^{\mathrm{geo}} S^n \cong \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \langle p, v \rangle = 0 \right\}.$$

Aufgabe 7.2. Beweisen Sie Lemma 5.8 aus der Vorlesung: Zeigen Sie, dass für differenzierbares $f\colon M \to N$ und $p \in M$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_p^{\mathrm{geo}} M \arrow[r, "d_p^{\mathrm{geo}} f"] & T_{f(p)}^{\mathrm{geo}} N \\ \mathbb{R}^m \arrow[u, "\kappa_\varphi"] \arrow[r, "D\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(p))"'] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "\kappa_\psi"'] \end{tikzcd}$$

für alle Karten $\varphi \in \mathcal{S}_p^M$ und $\psi \in \mathcal{S}_p^N$ kommutativ ist.

Aufgabe 7.3. Sei $d_p f$ entweder $d_p^{\mathrm{lok}} f$, $d_p^{\mathrm{geo}} f$ oder $d_p^{\mathrm{alg}} f$. Geben Sie für alle Fälle unabhängige Beweise folgender Aussagen.

(a) Für konstante Abbildungen $f\colon M \to N$ gilt $d_p f = 0$ für alle $p \in M$.

(b) Für eine Komposition $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ differenzierbarer Abbildungen gilt für alle $p \in M$

$$d_p(g \circ f) = d_{f(p)} g \circ d_p f.$$