Differentialtopologie

— Übungsblatt 8 —

Wintersemester 2019/2020

(Abgabe am 2.12.2019)

Aufgabe 8.1 (Kanonischen Isomorphismen)**.** Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\varphi \in \mathcal{S}_p^M$ eine differenzierbare Karte um p. Zeigen Sie, dass die folgenden Isomorphismen nicht von der Wahl von φ abhängen:

$$T_p^{\mathrm{lok}} M \xrightarrow{\kappa_\varphi \circ \mathrm{ev}_\varphi} T_p^{\mathrm{geo}} M \qquad T_p^{\mathrm{lok}} M \xrightarrow{\partial^\varphi \circ \mathrm{ev}_\varphi} T_p^{\mathrm{alg}} M \qquad T_p^{\mathrm{geo}} M \xrightarrow{\partial^\varphi \circ \kappa_\varphi^{-1}} T_p^{\mathrm{alg}} M$$

Aufgabe 8.2 (Orthogonale Gruppen)**.** Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Vektorraum der reellen $(n \times n)$–Matrizen und S_n der Unterraum der symmetrischen Matrizen. Betrachten Sie die Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow S_n, \quad F(A) = A^t A.$$

(a) Zeigen Sie $DF(A)h = A^t h + h^t A$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und alle $h \in \mathbb{R}^{n\times n} \cong T_A\mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Einheitsmatrix $E \in S_n$ ein regulärer Wert von F ist.

(c) Folgern Sie, dass die *orthogonale Gruppe* $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t A = E\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist. Bestimmen Sie den die Dimension von $O(n)$ und den Tangentialraum $T_E O(n)$.

Aufgabe 8.3 (Kritische Punkte)**.** Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2$. Weiter sei $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ die Einschränkung $f = F|_{S^2}$. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von F und f. *(Hinweis: f hat sechs kritische Punkte, F nur einen, und der hat nichts mit denen von f zu tun.)*