Differentialtopologie

— Übungsblatt 9 —

Wintersemester 2019/2020

(Abgabe am 9.12.2019)

Aufgabe 9.1 (Kritische Punkte auf Untermannigfaltigkeiten). Sei $\tilde{f}\colon M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, $S \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit und $f = \tilde{f}|_S\colon S \to \mathbb{R}$ die Einschränkung. Zeigen Sie, dass $p \in S$ genau dann ein kritischer Punkt von f ist, wenn $T_pS \subset \ker d_p\tilde{f}$ gilt.

Aufgabe 9.2 (Der stehende Torus). Für $0 < r < R$ wird durch

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + z^2)\right\}$$

ein Torus beschrieben, der aufrecht in der (x, z) Ebene steht.

(a) Zeigen Sie, dass T eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist, in dem Sie zeigen, dass Null ein regulärer Wert von $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + z^2)$ ist.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Höhenfunktion $h\colon T \to \mathbb{R}$, $h(x, y, z) = z$.

Aufgabe 9.3 (Sard vs. Peano). Zeigen Sie, dass es keine surjektive differenzierbare Abbildung $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ gibt.