

Differentialtopologie

— Notizen zur Vorlesung —

Dr. Stefan Behrens

Universität Bielefeld

Wintersemester 2019/2020

(Letzte Änderung: 23. Januar 2020)

Achtung! Dieses Dokument sollte nicht mit einem Vorlesungsskript verwechselt werden. Vielmehr handelt es sich um eine Sammlung der wichtigen Definitionen und Sätze aus der Vorlesung mit gelegentlichem Fließtext. Die meisten Beispiele oder Beweise werden entweder ausgelassen oder nur skizziert. An anderen Stellen werden Bemerkungen aus der Vorlesung weiter ausgeführt. Die Nummerierung wird mit der Vorlesung übereinstimmen. In den Anhängen werden zusätzlich einige Grundbegriffe und Sätze aus der Topologie und Analysis wiederholt.

Noch einmal ausdrücklich: diese Notizen sind nicht zum Selbststudium konzipiert, sondern als Ergänzung zur Vorlesung und als Referenz für die Lösung der Übungsaufgaben. Der Besuch der Vorlesung und das anfertigen einer eigenen Mitschrift sind ausdrücklich empfohlen. Empfehlenswerte Bücher zu den Themen Differentialtopologie und Mannigfaltigkeiten allgemein sind [BJ82], [Wal16], [Bre93] und [Lee13].

Inhaltsverzeichnis

1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten und Abbildung	3
1.1	Motivation	3
1.2	Lokal Euklidische Räume und topologische Mannigfaltigkeiten	4
1.3	Differenzierbare Strukturen	4
1.4	Der Begriff der Dimension	6
1.5	Elementare Beispiele und Eigenschaften	7
2	Zerlegungen der Eins	8
2.1	Konstruktion von Zerlegungen der Eins	9
3	Einbettungen und Untermannigfaltigkeiten	11
3.1	Einbettungen	11
3.2	Untermannigfaltigkeiten	13
3.3	Der Rangsatz	16
4	Approximation stetiger Abbildungen und Homotopien	18
4.1	Approximation \mathbb{R}^n -wertiger Abbildungen	18
4.2	Homotopie und differenzierbare Homotopie	20
4.3	Differentialtopologie und algebraische Topologie	23
5	Tangentialvektoren und Differentiale	25
5.1	Vier Arten, Tangentialvektoren zu beschreiben	25
5.2	Eigenschaften des Differentials	34
5.3	Kritische Punkte und reguläre Werte	36
6	Der Satz von Sard und seine Anwendungen	40
6.1	Der Satz von Sard	40
6.2	Exkurs: Das Tangentialbündel als Mannigfaltigkeit	42
6.3	Der Einbettungssatz von Whitney	46
7	Vektorfelder, Flüsse und Isotopien	47
7.1	Vektorfelder	47
7.2	Flüsse	50
7.3	Isotopien	55
8	Tuben und Kragen	57
8.1	Mannigfaltigkeiten mit Rand	57
8.2	Kragen und Verkleben von Mannigfaltigkeiten mit Rand	60
8.3	Normalenbündel und Tubenumgebungen	62
9	Der Satz von Hopf und die Pontryagin Konstruktion	66
9.1	Orientierungen und der Abbildungsgrad	66
A	Grundbegriffe der Topologie	69
B	Erinnerungen an Analysis	71

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten und Abbildung

1.1 Motivation

7.10.2019

In der klassischen Mechanik und der angewandten Mathematik begegnen einem häufig folgende Objekte.

Definition 1.1. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k -dimensionale **reguläre lokale Nullstellenmenge** falls es für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ und eine C^∞ Abbildung $F: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ gibt, so dass

$$M \cap \tilde{U} = F^{-1}(0) \quad \text{und} \quad DF(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \text{ ist surjektiv.}$$

Intuitiv beschreiben die Komponenten von $F = (f_1, \dots, f_{n-k})$ Zwangsbedingungen der Form $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, die den Bewegungsraum lokal auf $M \cap U$ einschränken. Die Forderung an $DF(p)$ stellt sicher, dass diese Bedingungen unabhängig sind, und genau wie in der linearen Algebra sollten $n - k$ unabhängige Gleichungen einen k -dimensionalen Lösungsraum haben. Formal wird die Benutzung des Begriffs Dimension durch folgenden Satz gerechtfertigt.

Satz 1.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale reguläre lokale Nullstellenmenge. Dann gibt es für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$, eine offene Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^k$ und einen Homöomorphismus $\varphi: U \rightarrow U'$.

Beweis. Sei $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von p und $F: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ eine C^∞ Abbildung, so dass $M \cap \tilde{V} = F^{-1}(0)$ und $DF(p)$ surjektiv ist. Die Spalten der Jacobi Matrix von F sind gegeben durch $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$. Da $DF(p)$ surjektiv ist, hat die Matrix Rang $n - k$, so dass es $n - k$ linear unabhängige Spalten gibt. Eventuell nach Umsortieren der Koordinaten können wir annehmen, dass dies die ersten $n - k$ Spalten sind. Folglich ist die Matrix $J_{n-k} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n-k}$ invertierbar. Wir betrachten nun die Funktion

$$\tilde{F}: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \tilde{F} = (f_1, \dots, f_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n).$$

Dann gilt

$$D\tilde{F}(p) = \left(\begin{array}{c|c} J_{n-k} & * \\ \hline 0 & \mathbf{1}_k \end{array} \right)$$

wobei $\mathbf{1}_0$ die k -dimensionale Einheitsmatrix ist. Offensichtlich ist $D\tilde{F}(p)$ invertierbar, so dass der Satz über lokale Umkehrbarkeit eine kleine Umgebung $\tilde{U} \subset \tilde{V}$ garantiert, so dass

$$F|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}'$$

ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge $\tilde{U}' \subset \mathbb{R}^n$ ist. Nun gilt nach Annahme, dass

$$\tilde{F}(M \cap \tilde{U}) = (\{0\} \times \mathbb{R}^k) \cap \tilde{U}' \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n.$$

Per Definition der Unterraumtopologie ist $U = M \cap \tilde{U}$ eine offene Teilmenge von M und $F(U) = F(M \cap \tilde{U})$ wird unter der Projektion $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ auf die letzten k -Koordinaten homöomorph auf eine offene Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^k$ abgebildet. Folglich ist $p \circ F: U \rightarrow U'$ ein Homöomorphismus. \square

Satz 1.2 liefert ein wichtiges Indiz für eine intrinsische Beschreibung regulärer lokaler Nullstellenmenge, das heißt eine Beschreibung, die nicht auf einen umgebenden Raum angewiesen ist. Dies war eine zentrale Motivation in der Entwicklung des modernen Begriffs differenzierbarer Mannigfaltigkeiten.

1.2 Lokal Euklidische Räume und topologische Mannigfaltigkeiten

Zunächst machen wir die Konsequenz von Satz 1.2 zu einer Definition.

Definition 1.3. Sei X ein topologischer Raum. Ein Homöomorphismus $\varphi: U \rightarrow U'$ von einer offenen Menge $U \subset M$ auf eine offene Menge $U' \subset \mathbb{R}^k$ heißt eine k -dimensionale **Karte** von X . Die Menge $U \subset M$ heißt **Kartengebiet**.

Definition 1.4. X heißt **lokal Euklidisch** falls jeder Punkt in einer Kartenumgebung enthalten ist.

Wir stellen nun eine Liste von Forderungen auf, die eine “differenzierbare Mannigfaltigkeit” erfüllen sollte:

- (1) Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sollten lokal Euklidische Räume sein.
- (2) Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sollten nicht notwendigerweise Unterräume eines \mathbb{R}^N sein.
- (3) Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sollten sich dennoch bei Bedarf in einen \mathbb{R}^N einbetten lassen.
- (4) Differenzierbare Mannigfaltigkeiten eine Differentialrechnung wie in \mathbb{R}^n zulassen.

Wir wenden uns zunächst den Punkten (1) bis (3) zu. Punkt (3) bedeutet insbesondere, dass die gesuchten “differenzierbare Mannigfaltigkeiten” homöomorph zu Unterräumen von Euklidischen Räumen sein sollten. Letztere haben allerdings einige besondere Eigenschaften. Tatsächlich ist \mathbb{R}^n ein separabler metrischer Raum (mit z.B. \mathbb{Q}^n als dichter Teilmenge) und man prüft leicht nach, dass sich diese Eigenschaft auf Unterräumen vererbt. In der Praxis stellen sich jedoch Metriken als schwierig zu konstruieren heraus, weswegen es sich durchgesetzt hat mit folgenden Begriffen zu arbeiten.

Definition 1.5. Eine **topologische Mannigfaltigkeit** M ist ein lokal Euklidischer Hausdorff Raum mit abzählbarer Basis der Topologie.

Bekanntermaßen ist jeder metrische Raum automatisch Hausdorffsch und man überzeugt sich leicht, dass jeder separable metrische Raum eine abzählbare Basis der Topologie besitzt. Auch wenn dies überhaupt nicht klar ist, stellt sich heraus, dass jede topologische Mannigfaltigkeit separable metrisierbar ist; dies folgt aus dem Urysohnschen Metrisierungssatz (siehe [Bre93, Theorem 9.10]). Außerdem lässt sich zeigen, dass jede topologische Mannigfaltigkeit unserer Forderung (3) entspricht und homöomorph zu einem Unterraum von \mathbb{R}^N für hinreichend großes N ist. Darauf werden wir in später zurückkommen.

1.3 Differenzierbare Strukturen

14.10.2019

Als nächstes wenden wir uns der Forderung (4) unserer Liste zu. Als Vorüberlegung betrachten wir eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen zwei lokal Euklidischen Räumen. Seien $U \subset X$ und $V \subset Y$ Gebiete von Karten $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ und $\psi: V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^n$, so dass $f(U)$ in V enthalten ist. Die Komposition

$$\mathbb{R}^m \supset U' \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} V' \subset \mathbb{R}^n$$

nennt man eine **Kartendarstellung** von f . Dabei handelt es sich um eine Abbildung zwischen offener Teilmengen Euklidischer Räume. In diesem Kontext sind bereits diverse Maße für Regularität aus der Analysis bekannt, wie zum Beispiel C^∞ , die wir gerne global für f definieren würden.

Man sieht leicht, dass f genau dann in $p \in U$ stetig ist wenn $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(p)$ stetig ist. Der Kern der Forderung (4) ist, dass wir Differenzierbarkeit von f analog definieren

möchten. Leider ist dies nicht ohne weiteres möglich. Wählen wir nämlich andere Karten $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}'$ für M und $\tilde{\psi}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}'$ für N mit $p \in \tilde{U}$ und $f(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$, so gilt in einer Umgebung von p die Beziehung

$$\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} = (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) \quad (1)$$

zwischen den entsprechenden Kartendarstellungen von f .

Definition 1.6. Seien $\varphi: U \rightarrow U'$ und $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}'$ zwei Karten eines topologischen Raum X . Als **Kartenwechsel** bezeichnen wir die Kompositionen

$$\begin{aligned} \varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}: \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U}) &\longrightarrow \varphi(U \cap \tilde{U}) \quad \text{und} \\ \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap \tilde{U}) &\longrightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U}). \end{aligned}$$

Per Konstruktion sind Kartenwechsel Homöomorphismen und Komposition mit Homöomorphismen erhält bekanntermaßen Stetigkeit. Allerdings ist es eine durchaus verstörende Erkenntnis, dass Komposition Homöomorphismen nahezu jede Eigenschaft ruinieren kann, die nicht schon aus Stetigkeit folgt. Ein relevantes Beispiel: angenommen die Kartendarstellung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ sei unendlich oft differenzierbar in $\varphi(p)$. Dann ist es ein Leichtes, Karten $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$ zu finden, so dass $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ nicht ein einziges mal in $\tilde{\varphi}(p)$ differenzierbar ist. Dabei kann man zum Beispiel die Funktion $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ benutzen, die einen Homöomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ darstellt, der in $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

Die Moral von dieser Geschichte ist, dass wir nicht mit völlig beliebigen Karten arbeiten können, wenn wir im Kontext von lokal Euklidischen Räumen vernünftig von Differenzierbarkeit sprechen möchten. Als Ausweg wählen wir die klassische Methode, das Problem “wegzudefinieren”.

Definition 1.7. Sei X ein lokal Euklidischer Raum.

- (a) Zwei Karten φ und $\tilde{\varphi}$ von X heißen C^∞ **verträglich** falls die Kartenwechsel $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ und $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ unendlich oft differenzierbar sind.
- (b) Eine Menge von Karten $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow U'_\alpha\}_{\alpha \in A}$ heißt **Atlas** von X falls die Kartengebiete ganz X überdecken, das heißt $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$.
- (c) Ein Atlas \mathcal{A} von X heißt **differenzierbar** falls alle Karten aus \mathcal{A} paarweise C^∞ verträglich sind.
- (d) Ein differenzierbarer Atlas \mathcal{S} heißt **differenzierbare Struktur** auf X falls jede Karte von X , die C^∞ verträglich mit denen aus \mathcal{S} ist, schon in \mathcal{S} enthalten ist.

Um eine differenzierbare Struktur festzulegen, genügt es, einen beliebigen differenzierbaren Atlas anzugeben. Die differenzierbare Struktur entsteht durch Hinzunahme aller C^∞ verträglichen Karten. In der Praxis bemüht man sich darum, Atlanten möglichst klein zu halten.

Nach all diesen Vorüberlegungen landen wir bei folgenden Definitionen.

Definition 1.8. Eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit** ist ein Paar (M, S) bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit M und mit einer differenzierbaren Struktur S auf M . Die Karten der differenzierbaren Struktur nennen wir **differenzierbare Karten** von M .

Üblicherweise spricht man nur von “*einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M* ”, ohne die differenzierbare Struktur explizit zu erwähnen. Dieser Mangel an Präzision führt in der Praxis äußerst selten zu Missverständnissen.

Die differenzierbare Struktur erlaubt nun wie geplant differenzierbare Abbildungen in folgendem Sinn zu betrachten.

Definition 1.9. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

- (a) Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N heißt **differenzierbar** in einem Punkt $p \in M$ wenn es differenzierbare Karten $\varphi: U \rightarrow U'$ von M und $\psi: V \rightarrow V'$ von N mit $p \in U$ und $f(U) \subset V$ gibt, so dass die Kartendarstellung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(p)$ unendlich oft differenzierbar ist.
- (b) Wenn $f: M \rightarrow N$ in jedem Punkt von M differenzierbar ist sprechen wir von einer **differenzierbaren Abbildung**. Die Menge aller differenzierbaren Abbildungen von M nach N wird mit $C^\infty(M, N)$ bezeichnet.
- (c) Im Spezialfall $N = \mathbb{R}$ sprechen wir von einer **differenzierbaren Funktion** $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ und schreiben kurz $C^\infty(M)$ statt $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

1.4 Der Begriff der Dimension

Bisher ist das Wort Dimension nur nebenbei gefallen, und das nicht ohne Grund. Zunächst die gute Nachricht: jede nicht leere, zusammenhängende Mannigfaltigkeit hat eine wohldefinierte Dimension, nämlich die Dimension einer beliebigen differenzierbaren Karte. Dies folgt unmittelbar aus dem nächsten Lemma.

Lemma 1.10. Sei $h: U \rightarrow U'$ ein Diffeomorphismus zwischen nicht leeren, offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^m$ und $U' \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt $m = n$.

Beweis. Die Ableitung $Dh(p): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist für beliebiges $p \in U$ ein linearer Isomorphismus und folglich $m = n$. Dies folgt aus der Kettenregel angewandt auf $h \circ h^{-1} = \text{id}_U$ und $h' \circ h = \text{id}_{U'}$. \square

Sei nun M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Indem wir [Lemma 1.10](#) auf die Kartenwechsel anwenden, sehen wir, dass alle differenzierbaren Karten, die p enthalten, die gleiche Dimension haben. Wir können also eine beliebige differenzierbare Karte $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ mit $p \in U$ wählen und erhalten eine wohldefinierte **lokale Dimension**

$$\dim_p(M) := m,$$

die zunächst noch von p abhängen könnte. Aus der Definition ist klar, dass die Dimensionsfunktion $p \mapsto \dim_p(M)$ auf dem Kartengebiet U konstant ist. Falls M als topologischer Raum zusammenhängend ist, liefern elementare topologische Argumente, dass die Dimensionsfunktion konstant auf ganz M ist. Im allgemeinen Fall ist sie auf jeder Zusammenhangskomponente konstant.

Konvention: Im Folgenden beschränken wir uns im wesentlichen auf zusammenhängende Mannigfaltigkeiten oder zumindest auf solche, deren Komponenten alle die selbe Dimension haben. Wir schreiben also nur noch $\dim(M)$ und diese Zahl stimmt mit der Dimension einer beliebigen Karte überein. Ein Sonderfall ist die leere Menge \emptyset . Da diese für beliebiges n in \mathbb{R}^n enthalten ist, kann sie jede beliebige Dimension annehmen.

Die Frage, ob topologische Mannigfaltigkeiten oder lokal Euklidische Räume (lokal) wohldefinierte Dimensionen haben ist überraschend subtil. Tatsächlich sollte man sich bewusst machen, dass die Dimension einer Karte $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ per Definition die Vektorraumdimension von \mathbb{R}^n . Letztere ist a priori rein algebraischer Natur und hat überhaupt nichts mit Topologie zu tun. Im differenzierbaren Kontext liefert die Ableitung einen Zusammenhang zwischen Topologie und linearer Algebra her. Für Abbildung, die lediglich stetig sind, fehlt ein solches Bindeglied. Dennoch gelang es Brouwer mit Methoden der algebraischen Topologie, das stetige Analogon zu [Lemma 1.10](#) zu beweisen.

Satz 1.11 (Brouwer, 1911). *Sei $h: U \rightarrow U'$ ein Homöomorphismus zwischen nicht leeren, offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^m$ und $U' \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt $m = n$.*

Heutzutage beweist man dieses Resultat üblicherweise mit Homologietheorie (siehe zum Beispiel [Bre93, IV.19.10]).

1.5 Elementare Beispiele und Eigenschaften

Nachdem wir uns mühsam die Definitionen erarbeiten haben, betrachten wir einige elementare Beispiele und ziehen einfache Schlüsse aus den Definitionen.

- (1) Der Euklidische Raum \mathbb{R}^n wird auf kanonische Art und Weise zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit indem wir die Identität $\text{id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ als differenzierbaren Atlas mit einer Karte auffassen. Etwas allgemeiner sei V ein endlich dimensionaler normierter Vektorraum. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass V als Vektorraum isomorph to \mathbb{R}^n ist. Konkret liefert jede Basis \mathcal{B} von V einen linearen Isomorphismus $\varphi_{\mathcal{B}}: V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Aus der Analysis ist ferner bekannt, dass $\varphi_{\mathcal{B}}$ ein Homöomorphismus ist. Dies folgt sofort aus der Tatsache, dass alle Normen auf \mathbb{R}^n äquivalent sind. Wir haben also wieder einen Atlas mit einer einzigen Karte $\varphi_{\mathcal{B}}$. Wählen wir eine andere Basis \mathcal{C} sind die Kartenwechsel $\varphi_{\mathcal{C}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ linear, also insbesondere differenzierbar. Folglich gehören sie zu derselben differenzierbaren Struktur auf V , die wir fortan die **lineare differenzierbare Struktur** auf V nennen.
- (2) Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ offen. Die Hausdorff Eigenschaft und die abzählbare Basis vererben sich von M zu U . Indem wir differenzierbare Karten $\varphi: V \rightarrow V'$ von M auf $U \cap V$ einschränken erhalten wir zusätzlich eine induzierte differenzierbare Struktur auf U . Man überlegt sich leicht, dass die Inklusion $U \hookrightarrow M$ und die Einschränkungen differenzierbarer Abbildungen von M auf U differenzierbare Abbildungen sind.
- (3) Als Kombination von (1) und (2) sehen wir, dass offene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^m$ auf kanonische Art und Weise differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind. Ferner ist klar, dass Abbildungen $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann differenzierbar im Sinne von Definition 1.9 sind wenn sie im klassischen Sinn differenzierbar sind, da wir zum testen einfach die Identitätsabbildungen als Karten wählen können. F ist also seine eigene Kartendarstellung.
- (4) Das kartesische Produkt $M \times N$ zweier differenzierbarer Mannigfaltigkeiten M und N ist mit der Produkttopologie wieder ein Hausdorff Raum mit abzählbarer Basis und die kartesischen Produkte differenzierbarer Karten von M und N liefern einen differenzierbaren Atlas für $M \times N$. Wieder ist sofort klar, dass das kartesische Produkt $f \times g: M \times N \rightarrow P \times Q$ zweier differenzierbarer Abbildungen $f: M \rightarrow P$ und $g: N \rightarrow Q$ wieder differenzierbar ist. Es ist eine einfache Übung, sich zu überzeugen, dass die differenzierbare Struktur auf \mathbb{R}^n mit dem n -fachen Produkt von \mathbb{R} übereinstimmt.
- (5) Durch ausschreiben der Definitionen sieht man leicht, dass die Identitätsabbildung für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit differenzierbar ist, und dass Kompositionen differenzierbarer Abbildungen wieder differenzierbar sind. Ebenso ist offensichtlich, dass konstante Abbildungen differenzierbar sind, da ihre Kartendarstellungen ebenfalls konstant sind.

Nun zu einigen konkreteren Beispielen.

- (6) Die n -dimensionale Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist als Unterraum von \mathbb{R}^{n+1} automatisch ein Hausdorff Raum mit abzählbarer Basis. Auf den offenen Teilmengen

$$U_{\pm} = S^n \cap \{x_{n+1} \neq \mp 1\}$$

sind durch stereografische Projektion

$$\varphi_{\pm}: U_{\pm} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_{\pm}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 \pm x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

Karten gegeben, die einen differenzierbaren Atlas bilden. (Nachrechnen!) Wir benutzen diesen Atlas, um S^n zu einer n -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit zu machen. Mit der Produktstruktur wird auch der n -dimensionale Torus $T^n = (S^1)^n$ zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Man sieht leicht, dass die Inklusion $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eine differenzierbare Abbildung ist. Falls $S^n \subset U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Umgebung von S^n und $f: U \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung ist, ist die Einschränkung $f|_{S^n}$ differenzierbar.

- (7) Die projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ hat einen differenzierbaren Atlas mit den Kartengebieten

$$U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Hierbei sind $[x_0 : \dots : x_n]$ die homogenen Koordinaten der Ursprungsgerade durch den Punkt $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Die Karten sind gegeben durch

$$\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_i([x_0 : \dots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

und man rechnet leicht nach, dass die Kartenwechsel differenzierbar sind. Um die Hausdorff-Eigenschaft von $\mathbb{R}P^n$ nachzuweisen, überlegt man sich, dass man für je zwei Ursprungsgeraden in \mathbb{R}^{n+1} disjunkte offene Kegel in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ finden kann. Eine abzählbare Basis liegt vor, weil $\mathbb{R}P^n$ einen endlichen Atlas hat. Allgemeiner hat jeder lokal euklidische Raum, der einen abzählbaren Atlas besitzt, eine abzählbare Basis der Topologie. Man prüft leicht nach, dass die Abbildung

$$S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n, \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : \dots : x_n]$$

differenzierbar ist.

- (8) Man kann zeigen, dass die Karten aus [Satz 1.2](#) einen differenzierbaren Atlas für die regulären lokalen Nullstellenmengen aus [Definition 1.1](#) bilden. Letztere können somit als differenzierbare Mannigfaltigkeiten im Sinne von [Definition 1.8](#) aufgefasst werden.

2 Zerlegungen der Eins

Mit den sogenannten Zerlegungen der Eins lernen wir eines der zentralen Werkzeuge der Differentialtopologie kennen. Im Folgenden sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für eine gegebene Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist der **Träger**¹ definiert als

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}} = \text{Abschluss}(\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}).$$

Eine Familie $\{M_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ beliebiger Teilmengen von M heißt **lokal endlich** wenn jeder Punkt aus M eine Umgebung besitzt, die nur endlich viele der M_{α} schneidet.

Definition 2.1. Eine differenzierbare **Zerlegung der Eins** ist eine Familie $\{\rho_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ differenzierbarer Funktionen $\rho_{\alpha}: M \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Die Familie der Träger $\{\text{supp } \rho_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ ist lokal endlich.
- (2) Für alle $p \in M$ gilt $\sum_{\alpha \in A} \rho_{\alpha}(p) = 1$.

¹Englisch: *support*

Die Bedingung (1) garantiert, dass die Summe in (2) an jedem Punkt endlich ist. Wir nennen $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ **subordiniert** zu einer offenen Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_\beta\}_{\beta \in B}$ wenn für alle $\alpha \in A$ ein $\beta \in B$ existiert, so dass $\text{supp } \rho_\alpha \subset U_\beta$.

Satz 2.2 (Existenz von Zerlegungen der Eins). *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zu jeder offenen Überdeckung $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ von M existiert eine subordinierte Zerlegung der Eins $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Die Indexmenge A kann abzählbar gewählt werden.*

Bevor wir uns dem Beweis widmen halten wir fest, dass **Satz 2.2** die Existenz einer Vielzahl differenzierbarer Funktionen garantiert.

Korollar 2.3 (Existenz von Abschneidefunktionen). *Sei $A \subset M$ eine abgeschlossene Teilmenge und $U \subset M$ eine beliebige offene Umgebung von A . Dann gibt es eine differenzierbare Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $f|_A \equiv 1$ und $\text{supp } f \subset U$.*

Beweis. Durch $M = U \cup (M \setminus A)$ ist eine offene Überdeckung gegeben. Sei $\{\rho_\beta\}_{\beta \in B}$ eine subordinierte Zerlegung der Eins und sei $B_U = \{\beta \in B \mid \text{supp } \rho_\beta \subset U\}$. Dann hat $f = \sum_{\beta \in B_U} \rho_\beta$ die gewünschten Eigenschaften. \square

2.1 Konstruktion von Zerlegungen der Eins

21.10.2019

Der Beweis von **Satz 2.2** erfolgt in drei Lemmata. Das Erste konstruiert differenzierbare Atlanten mit praktischen Eigenschaften. Das Zweite liefert Abschneidefunktionen für Euklidische Bälle. Das Dritte und letzte benutzt diese praktischen Atlanten Abschneidefunktionen, um schließlich Zerlegungen der Eins zu konstruieren. Wir folgen dabei im wesentlichen der Darstellung aus [BJ82, Ch. 7].

Lemma 2.4. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M . Dann gibt es einen abzählbaren differenzierbaren Atlas $\{\varphi_\nu: V_\nu \rightarrow V'_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ von M mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) $\{V_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ ist eine lokal endliche Verfeinerung² von $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.
- (ii) $V'_\nu = B_3(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 3\}$
- (iii) Die Mengen $W_\nu = \varphi_\nu^{-1}(B_1(0))$ bilden eine Überdeckung von M .

Einen lokal endlichen Atlas, der die Eigenschaften (ii) und (iii) erfüllt, nennen wir **praktisch**.

Beweis. Wir konstruieren zunächst eine *kompakte Ausschöpfung* von M , das heißt, eine Folge kompakter Mengen $A_n \subset M$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $A_n \subset \overset{\circ}{A}_{n+1}$ und $M = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ gilt. Sei dazu \mathcal{B} eine abzählbare Basis der Topologie von M . Da M lokal Euklidisch, also insbesondere lokal kompakt ist, können wir eine abzählbare Überdeckung $M = \cup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ mit $B_i \in \mathcal{B}$ finden, so dass der Abschluss \overline{B}_i für jedes i kompakt ist. Wir definieren nun induktiv zunächst $A_1 = \overline{B}_1$. Falls A_n bereits definiert ist wählen wir wählen wir eine endliche offene Überdeckung $A_n \cup \overline{B}_{n+1} = B_{i_1} \cup \dots \cup B_{i_r}$ und setzen $A_{n+1} = \overline{B}_{i_1} \cup \dots \cup \overline{B}_{i_r}$. Wir halten fest, dass die Mengen der Form $\overset{\circ}{A}_{n+2} \setminus A_{n-1}$ eine lokal endliche offene Überdeckung von M bilden, wobei wir $A_0 = \emptyset$ setzen.

Als nächstes wählen wir um jeden Punkt $p \in M$ eine differenzierbare Karte $\tilde{\varphi}_p: \tilde{V}_p \rightarrow \tilde{V}'_p$ mit $p \in \tilde{V}_p$. Eventuell nach Verkleinerung des Kartengebietes können wir annehmen, dass es für jedes $p \in M$ ein $\alpha \in A$ so dass

$$\tilde{V}_p \subset U_\alpha \cap (\overset{\circ}{A}_{i+2} \setminus A_{i-1}),$$

²siehe Definition A.5

wobei $i \in \mathbb{N}$ eindeutig durch $p \in A_{i+1} \setminus A_i$ bestimmt ist. Per Definition ist $\tilde{V}'_p \subset \mathbb{R}^m$ offen und enthält somit einen offenen Ball $B_{\epsilon_p}(\tilde{\varphi}_p(p))$. Durch Verschieben und reskalieren erhalten wir so eine neue differenzierbare(!) Karte

$$\varphi_p: V_p \rightarrow B_3(0), \quad q \mapsto \frac{3}{\epsilon_p}(\tilde{\varphi}_p(q) - \tilde{\varphi}_p(p))$$

wobei $V_p = \tilde{\varphi}_p^{-1}(B_{\epsilon_p}(\tilde{\varphi}_p(p)))$. Weiterhin setzen wir $W_p = \varphi_p^{-1}(B_1(0))$. Offensichtlich ist durch $\{\varphi_p: V_p \rightarrow B_3(0)\}_{p \in M}$ ein differenzierbarer Atlas von M gegeben, der die Bedingungen (ii) und (iii) erfüllt. Außerdem gilt

$$W_p \subset V_p \subset U_\alpha \cap (\mathring{A}_{i+2} \setminus \mathring{A}_{i-1}) \quad (2)$$

für α und i wie zuvor. Insbesondere ist $\{V_p\}_{p \in M}$ eine Verfeinerung von $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Schließlich benutzen wir die kompakte Ausschöpfung, um einen abzählbaren und lokal endlichen Teilatlas auszuwählen. Jede der Mengen $A_{n+1} \setminus A_n$ ist kompakt und lässt sich somit durch endlich viele Mengen der Form W_p überdecken. Insgesamt gibt es also abzählbar viele Punkte p_ν , $\nu \in \mathbb{N}$, so dass die Mengen $W_\nu = W_{p_\nu}$ eine offene Überdeckung von M bilden, und durch $\{\varphi_\nu: V_\nu \rightarrow B_3(0)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ mit $V_\nu = V_{p_\nu}$ und $\varphi_\nu = \varphi_{p_\nu}$ ein abzählbarer differenzierbarer Atlas gegeben, der fast alle der gewünschten Eigenschaften hat. Es bleibt lediglich zu zeigen, dass die Überdeckung $\{V_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ lokal endlich ist. Die Bedingung (2) garantiert allerdings, dass jede der Mengen $\mathring{A}_{n+2} \setminus \mathring{A}_{n-1}$ nur endlich viele der V_ν schneiden kann. \square

Lemma 2.5. Für alle $0 < r < R$ gibt es eine differenzierbare Funktion

$$\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] \quad \text{mit} \quad \psi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq r \\ \in (0, 1), & |x| > r \\ 0, & |x| \geq R. \end{cases}$$

Beweis. Das zentrale Werkzeug ist die Funktion $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\lambda(t) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{t^2}), & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

von der (hoffentlich) aus Analysis I bekannt ist, dass sie unendlich oft differenzierbar ist. Für $\delta > 0$ ist dann durch

$$\phi_\delta := \frac{\lambda(t)}{\lambda(t) + \lambda(\delta - t)}$$

eine ebenfalls unendlich oft differenzierbare Funktion gegeben. Offenbar gilt $0 \leq \phi_\delta(t) \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und man überzeugt sich leicht, dass $\phi_\delta^{-1}(0) = (-\infty, 0]$ und $\phi_\delta^{-1}(1) = [\delta, \infty)$ gelten. Die Funktion

$$\psi_\delta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi_\delta(x) = 1 - \phi_\delta(|x|^2 - r^2)$$

erfüllt dann für $\delta = R^2 - r^2$ die gewünschten Bedingungen. \square

Lemma 2.6. Für jeden praktischen Atlas $\{\varphi_\nu: V_\nu \rightarrow V'_\nu\}_{\nu \in A}$ von M existiert eine differenzierbare Zerlegung der Eins $\{\rho_\nu\}_{\nu \in A}$ mit derselben Indexmenge, so dass $\text{supp}(\rho_\nu) \subset V_\nu$ für alle $\nu \in A$.

Beweis. Sei $m = \dim(M)$ und $\psi: \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ wie in Lemma 2.5 mit $r = 1$ und $R = 2$. Wir definieren zunächst Abschneidefunktionen

$$\psi_\nu: M \rightarrow [0, 1], \quad \psi_\nu(p) = \begin{cases} \psi(\varphi_\nu(p)), & p \in V_\nu \\ 0, & p \notin V_\nu. \end{cases} \quad (3)$$

Offensichtlich ist die Kartendarstellung von ψ_ν bezüglich φ_ν durch ψ gegeben. Somit ist ψ_ν in jedem Punkt von V_ν differenzierbar und es gilt $\text{supp}(\psi_\nu) \subset V_\nu$. Letzteres garantiert

einerseits, dass die Fortsetzung durch Null auf ganz M differenzierbar ist, und andererseits, dass die Familie $\{\text{supp } \psi_\nu\}_{\nu \in A}$ lokal endlich ist. Insbesondere ist die Summe

$$\psi_A(p) = \sum_{\nu \in A} \psi_\nu(p)$$

für alle $p \in M$ endlich und definiert eine differenzierbare Funktion $\psi_A: M \rightarrow [0, \infty)$. Ferner gilt

$$\psi_\nu^{-1}(1) = \varphi_\nu^{-1}(\overline{B_1(0)}) = \overline{W}_\nu \quad (4)$$

und da die Mengen W_ν per Annahme eine Überdeckung von M bilden, gibt es für jedes $p \in M$ ein ν mit $\psi_\nu(p) = 1$. Insbesondere gilt also $\psi_A(p) \geq 1$ für alle $p \in M$. Somit ist durch

$$\rho_\nu := \frac{\psi_\nu}{\psi_A}: M \rightarrow [0, 1], \quad \nu \in A$$

eine Familie differenzierbarer Funktionen gegeben, die offensichtlich eine Zerlegung der Eins mit den gewünschten Eigenschaften liefert. \square

Beweis von Satz 2.2: Die Existenz subordinierter Zerlegungen der Eins folgt nun, indem wir zunächst zu einer vorgegebenen offenen Überdeckung mit Hilfe von Lemma 2.4 einen praktischen Atlas finden und dann die Zerlegung der Eins wie in Lemma 2.6 konstruieren. \square

3 Einbettungen und Untermannigfaltigkeiten

Auf Seite 4 hatten wir eine Liste von Forderungen aufgestellt, die differenzierbare Mannigfaltigkeiten erfüllen sollten. Die Punkte (1) und (2) sind per Definition gewährleistet. Der Punkt (4) ist zu diesem Zeitpunkt noch etwas holprig implementiert, aber durch Kartenwahl können wir uns auf die Differentialrechnung im \mathbb{R}^n zurück ziehen. In diesem Kapitel zeigen wir, dass auch Punkt (3) erfüllt ist. Wir zeigen zunächst, dass jede differenzierbare Mannigfaltigkeit eine sogenannte Einbettung in einen Euklidischen Raum besitzt und insbesondere homöomorph zu einem Unterraum eines Euklidischen Raums ist. Danach zeigen wir, dass das Bild einer solchen Einbettung eine sogenannte Untermannigfaltigkeit ist. Schließlich stellen wir fest, dass die ominösen regulären lokalen Nullstellenmengen aus Definition 1.1 genau die Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n sind.

3.1 Einbettungen

Zunächst müssen wir erklären, was wir unter dem Begriff Einbettung verstehen wollen. Dafür führen wir etwas Sprechweise ein. Für eine differenzierbare Abbildung $f: M \rightarrow N$, differenzierbare Karten $\varphi: U \subset U'$ von M und $\psi: V \rightarrow V'$ von N mit $f(U) \subset V$ und $p \in U$ nennen wir die lineare Abbildung

$$D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)): \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine **lokale Ableitung von f in p** . Die differenzierbare(!) Abbildung

$$D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}): U \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), \quad p \mapsto D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$$

nennen wir die **lokale Ableitung** von f bezüglich φ und ψ . Die Tatsache, dass f nicht nur eine, sondern viele lokale Ableitungen besitzt macht die Theorie im Moment noch etwas unhandlich. Später werden wir noch eine globale Ableitung konstruieren, die elegantere Formulierungen ermöglicht.

Definition 3.1. Sie $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung.

(a) f heißt **Immersion** falls alle lokalen Ableitungen von f an jedem Punkt injektiv sind.

(b) f heißt (differenzierbare) **Einbettung** wenn f eine injektive Immersion und die induzierte Abbildung $M \rightarrow f(M)$ ein Homöomorphismus ist.

Bemerkung. (i) Eventuell ist der Begriff Einbettung schon aus der Topologie bekannt als eine stetige Abbildung, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist. Um Verwirrung zu vermeiden sprechen wir in diesem Fall explizit von einer **topologischen Einbettung**. Eine differenzierbare Einbettung ist demnach eine differenzierbare Abbildung, die gleichzeitig eine topologische Einbettung und eine Immersion ist.

(ii) Die Bedingung, dass alle lokalen Ableitungen überall injektiv sind, ist bereits erfüllt wenn für jeden Punkt eine lokale Ableitung injektiv ist. Dies folgt wie üblich aus der Kettenregel.

Wir wenden uns nun der Einbettungsfrage zu.

Satz 3.2 (Einfacher Einbettungssatz). *Sei M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann es für genügend großes $n > 0$ eine differenzierbare Einbettung $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Die Kompaktheit von M und **Lemma 2.4** garantieren die Existenz eines endlichen praktischen Atlas

$$\{\varphi_\nu: V_\nu \rightarrow B_3(0)\}_{\nu=1, \dots, r}.$$

Sei $\psi_\nu: M \rightarrow [0, 1]$ wie in (3). Wir definieren

$$f_\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}, \quad f_\nu(p) = \begin{cases} \psi_\nu(p) \cdot \varphi_\nu(p), & p \in V_\nu \\ 0, & p \notin V_\nu. \end{cases}$$

Die Kartendarstellung bezüglich φ_ν ist dann für $x \in B_3(0)$ gegeben durch

$$f_\nu \circ \varphi_\nu^{-1}(x) = \psi_\nu(x) \cdot x$$

Dies zeigt wie zuvor für ψ_ν , dass f_ν auf ganz M differenzierbar ist. Wir definieren nun

$$g_\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}, \quad g_\nu = (f_\nu, \psi_\nu)$$

und schließlich

$$g: M \rightarrow \mathbb{R}^{r(m+1)}, \quad g = (g_1, \dots, g_r).$$

Wir wollen nun zeigen, dass g eine Einbettung ist.

Um zu zeigen, dass g injektiv ist, seien $p \neq q \in M$ mit $p \in W_\nu$. Falls $q \notin \overline{W}_\nu$ gilt wegen (4) $\psi_\nu(p) = 1 > \psi_\nu(q)$, also insbesondere $g_\nu(p) \neq g_\nu(q)$. Falls $q \in \overline{W}_\nu$ gilt $\psi_\nu(p) = 1 = \psi_\nu(q)$ und somit

$$g_\nu(p) = (\varphi_\nu(p), 1) \neq (\varphi_\nu(q), 1) = g_\nu(q),$$

da die Kartenabbildung φ_ν injektiv ist. In beiden Fällen gilt insbesondere $g(p) \neq g(q)$, was zu zeigen war.

Zu diesem Zeitpunkt wissen wir, dass $g: M \rightarrow \mathbb{R}^{r(m+1)}$ injektiv und differenzierbar ist, also insbesondere auch stetig. Da M kompakt ist und $\mathbb{R}^{r(m+1)}$ ein Hausdorff Raum ist, garantiert ein Satz aus der Topologie, dass die induzierte Abbildung $M \rightarrow g(M)$ ein Homöomorphismus ist.

Es bleibt also zu zeigen, dass g eine Immersion ist. Dies folgt aber leicht aus der obigen Kartendarstellung von f_ν . Für $p \in W_\nu$ gilt nämlich wegen $\psi_\nu(p) = 1$ für $x \in B_1(0)$

$$f_\nu \circ \varphi_\nu^{-1}(x) = x.$$

Insbesondere ist $D(f_\nu \circ \varphi_\nu^{-1})(x)$ die Identitätsabbildung und somit injektiv. Da jeder Punkt in einer der Mengen W_ν enthalten ist und jedes $D(f_\nu \circ \varphi_\nu^{-1})(x)$ in einer Komponente von $D(g \circ \varphi_\nu^{-1})(x)$ auftritt, ist $D(g \circ \varphi_\nu^{-1})(x)$ für alle ν und $x \in B_1(0)$ injektiv. \square

Bemerkung. (i) [Satz 3.2](#) gilt auch für nicht kompakte Mannigfaltigkeiten. Der gegebene Beweis funktioniert allerdings nicht ohne weiteres.

- (ii) Später werden wir zeigen, dass jede m -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^{2m+1} eingebettet werden kann. Tatsächlich kann man zeigen, dass eine Einbettung in \mathbb{R}^{2m} existiert, was allerdings deutlich schwieriger ist.
- (iii) Die Frage, was für eine gegebene m -dimensionale Mannigfaltigkeit M der niedrigste Wert von n ist, so dass eine Einbettung $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert ist, ist hochgradig nicht trivial. Mit Methoden der algebraischen Topologie kann man zeigen, dass $\mathbb{R}P^2$ nicht in \mathbb{R}^3 eingebettet werden kann. Folglich ist $n = 2m$ die optimale universelle Schranke.

3.2 Untermannigfaltigkeiten

28.10.2019

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten können gewissermaßen als nichtlineare Versionen von (reellen) Vektorräumen und linearen Abbildungen aufgefasst werden. Lokale Resultate in der Differentialtopologie beruhen oft auf linearer Algebra. Im Prinzip ist das keine große Überraschung, da schließlich lineare Approximation die zentrale Idee von Differenzierbarkeit ist. Wir verdeutlichen diese Analogie, in dem wir das Konzept von Untermannigfaltigkeiten einführen und ihren Zusammenhang mit Immersionen und Einbettungen herstellen. Dabei behalten wir folgende einfache Fakten aus der linearen Algebra im Hinterkopf. Sei $T: V \rightarrow W$ eine injektive lineare Abbildung zwischen reellen Vektorräumen. Dann gilt:

- $T(V)$ ist ein Untervektorraum von W .
- $T(V)$ erbt von W eine Vektorraumstruktur (die a priori nichts mit V zu tun hat!)
- T induziert einen Isomorphismus $V \cong T(V)$.

Ähnliches gilt für differenzierbare Einbettungen. Wir streben folgende Analogie an:

Lineare Algebra	Differentialtopologie
Vektorraum	differenzierbare Mannigfaltigkeit
Untervektorraum	Untermannigfaltigkeit
lineare Injektion	differenzierbare Einbettung
linearer Isomorphismus	Diffeomorphismus

Allgemein haben viele Konzepte und Sätze aus der linearen Algebra eine nicht-lineare Version in der Welt der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Hier das Analogon für Untervektorräume:

Definition 3.3. Sei N eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $S \subset N$ ist eine k -dimensionale **Untermannigfaltigkeit** von N falls es jedes $p \in S$ eine offene Umgebung $U \subset N$ und eine differenzierbare Karte $\varphi: U \rightarrow U'$ von N gibt, so dass

$$\varphi(S \cap U) \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n.$$

Wir nennen solche Karten von N **adaptiert zu S** .

Untervektorräume sind selbst wieder Vektorräume. Das gleiche gilt für Untermannigfaltigkeiten.

Lemma 3.4. Sei $S \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit.

- (i) Die zu S adaptierten Karten von N legen eine differenzierbare Struktur auf S fest. Insbesondere ist S selbst auf natürliche Weise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.
- (ii) Die Inklusionsabbildung $\iota: S \rightarrow N$ ist eine differenzierbare Einbettung.

Beweis. (i) Als Unterraum von N ist S automatisch ein Hausdorff Raum mit abzählbarer Basis. Ein differenzierbarer Atlas von S ist durch Karten der Form

$$\varphi_S = pr_{\mathbb{R}^k} \circ \varphi: S \cap U \longrightarrow pr_{\mathbb{R}^k}(\varphi(S \cap U)) \subset \mathbb{R}^k$$

gegeben, wobei φ eine zu S adaptierte Karte von N ist und $pr_{\mathbb{R}^k}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die *ersten* k Koordinaten. Man überzeugt sich leicht, dass die C^∞ Verträglichkeit zweier adaptierter Karten von N , die C^∞ Verträglichkeit der entsprechenden Karten von S zur Folge hat.

(ii) Die Inklusionsabbildung ι ist per Definition injektiv und ein Homöomorphismus auf ihr Bild. Um zu sehen, dass ι eine Immersion ist, betrachten wir eine zu S adaptierte Karte φ von N und die zugehörige Karte φ_S von S . Per Konstruktion hat die Kartendarstellung von ι die Form

$$\varphi \circ \iota \circ \varphi_S^{-1}(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0). \quad (5)$$

Folglich ist ι differenzierbar und hat überall injektive lokale Ableitungen. \square

An dieser Stelle blicken wir kurz zurück und stellen fest, dass wir Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n schon einmal gesehen haben.

Beispiel. (i) Die ominösen regulären lokalen Nullstellenmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ aus [Definition 1.1](#) sind nichts anderes als die Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n . Tatsächlich haben wir im Beweis von [Satz 1.2](#) zu einer regulären lokalen Nullstellenmengen M adaptierte Karten von \mathbb{R}^n konstruiert. Umgekehrt ist jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ lokal die Nullstellenmenge der Abbildungen $pr_{\mathbb{R}^{n-k}} \circ \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ wobei $\varphi: U \rightarrow U'$ eine zu M adaptierte Karte von \mathbb{R}^n und $pr_{\mathbb{R}^{n-k}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ die Projektion auf die *letzten* $n - k$ Koordinaten ist. Die Regularitätsbedingung prüft man leicht nach.

(ii) Insbesondere sind S^n und T^n Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^{n+1} und \mathbb{R}^{2n} .

(iii) Aus [Satz 3.2](#) und [Korollar 3.6](#) aus diesem Abschnitt folgt, dass tatsächlich jede (kompakte) Mannigfaltigkeit sich als Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n für hinreichend großes n darstellen lässt.

Das entscheidende Resultat, um die Konzepte von Einbettungen und Untermannigfaltigkeiten miteinander in Verbindung zu bringen, ist das folgende lokale Normalformenresultat.

Satz 3.5 (Normalform für Immersionen). *Sei $f: M \rightarrow N$ eine Immersion und $p \in M$ beliebig. Dann gibt es differenzierbare Karten $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ von M und $\psi: V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^n$ von N mit $p \in U$ und $f(U) \subset V$, so dass die Kartendarstellung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: U' \rightarrow V'$ folgende Gestalt hat:*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \quad (6)$$

Den Beweis reichen wir am Ende von [Abschnitt 3.3](#) nach, wo wir in [Satz 3.14](#) eine Normalform für eine allgemeinere Klasse von Abbildungen herleiten. Zunächst ziehen wir einige Schlüsse aus [Satz 3.5](#).

Korollar 3.6. *Sei N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $S \subset N$ eine Teilmenge. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) S ist eine Untermannigfaltigkeit von N .

(ii) S ist das Bild einer Einbettung $f: M \rightarrow N$.

Beweis. Laut [Lemma 3.4](#) ist für jede Untermannigfaltigkeit $S \subset N$ die Inklusion $\iota: S \hookrightarrow M$ eine Einbettung mit Bild S . Umgekehrt liefert [Satz 3.5](#) für jede Einbettung $f: M \rightarrow N$ zu $f(M)$ adaptierte Karten von N . Somit ist $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von N . \square

Fassen wir zusammen: wir haben gesehen, dass das Bild einer Einbettung die Struktur einer Untermannigfaltigkeit besitzt ([Korollar 3.6](#)), und dass Untermannigfaltigkeiten selbst Mannigfaltigkeiten sind ([Lemma 3.4](#)). Um die Analogie zur linearen Algebra komplett zu machen, fehlt noch eine Vokabel, nämlich das differenzierbare Analogon zu linearen Isomorphismen.

Definition 3.7. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine bijektive Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt **Diffeomorphismus** falls sowohl f als auch die Umkehrabbildung f^{-1} differenzierbar sind. Falls ein Diffeomorphismus existiert nennen wir M und N **diffeomorph**.

Die Normalform für Immersionen liefert eine nützliche Charakterisierung.

Korollar 3.8. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten derselben Dimension und $f: M \rightarrow N$ differenzierbar. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist ein Diffeomorphismus.
- (ii) f ist eine bijektive Immersion.

Beweis. Jeder Diffeomorphismus $f: M \rightarrow N$ ist bijektiv und die Kettenregel angewandt auf

$$\text{id}_{\mathbb{R}^n} = (\varphi \circ f^{-1} \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$$

zeigt, dass $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ an jeder Stelle invertierbar, also insbesondere injektiv, ist, so dass f eine Immersion ist. Umgekehrt liefert [Satz 3.5](#) für jede bijektive Immersion $f: M \rightarrow N$ Karten um beliebige Punkte von M und N Karten, so dass die Kartendarstellungen von f und f^{-1} die Identitätsabbildungen sind. Insbesondere ist f^{-1} differenzierbar und somit f ein Diffeomorphismus. \square

Damit können wir die eingangs beschriebene Analogie zur linearen Algebra komplett machen.

Korollar 3.9. Sei $f: M \rightarrow N$ eine Einbettung. Dann ist die induzierte Abbildung $M \rightarrow f(M)$ ein Diffeomorphismus.

Wir beenden schließen das Kapitel mit zwei Lemmata über differenzierbare Abbildungen aus und in Untermannigfaltigkeiten.

Lemma 3.10. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $S \subset M$ und $T \subset N$ Untermannigfaltigkeiten, und $f: M \rightarrow N$ differenzierbar.

- (i) Die Einschränkung $f|_S: S \rightarrow N$ ist differenzierbar.
- (ii) Falls $f(M) \subset T$, so ist die induzierte Abbildung $M \rightarrow T$ differenzierbar.

Beweis. Die Aussage (i) folgt aus der Differenzierbarkeit der Inklusion $\iota: S \rightarrow N$, da $f|_S = \iota \circ f$ gilt. Für (ii) betrachtet man eine zu T adaptierte Karte von N . Die Kartendarstellung von $M \rightarrow T$ erhält man aus der von f durch Komposition mit der Projektion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, was wieder eine differenzierbare Abbildung liefert. \square

Basierend auf [Lemma 3.10](#) erhalten wir eine alternative Charakterisierung für Differenzierbarkeit von auf Untermannigfaltigkeiten definierten Abbildungen.

Lemma 3.11. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $S \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit und $f: S \rightarrow N$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist differenzierbar.
- (ii) Für alle $p \in S$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ und eine differenzierbare Abbildung $\tilde{f}: U \rightarrow N$, so dass $\tilde{f}(s) = f(s)$ für alle $s \in S$ ist.

Beweis. Die Folgerung (ii) \Rightarrow (i) ist ein Spezialfall von [Lemma 3.10](#). Die andere Richtung ist etwas komplizierter

Sei $f: S \rightarrow N$ differenzierbar. Wir wählen Karten $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ von M und $\psi: V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^n$ von N , wobei φ adaptiert zu S . Per Definition ist der Zielbereich der induzierten Karten $\varphi_S: U_S \rightarrow U'_S$ gegeben durch die Projektion von U auf die ersten $k = \dim(S)$ Koordinaten. Insbesondere stellt diese Projektion in den Karten φ und φ_S eine differenzierbare Abbildung

$$\pi: U \rightarrow S \cap U$$

dar, die $\pi(s) = s$ für alle $s \in S$ erfüllt. Die Komposition $\tilde{f} = f \circ \pi: U \rightarrow N$ ist somit als Komposition differenzierbarer Abbildungen differenzierbar und liefert die gesuchte lokale Fortsetzung von f . \square

3.3 Der Rangsatz

4.11.2019

Sei $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Für $p \in M$ betrachten wir eine lokale Ableitung

$$D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Es folgt aus der Kettenregel, dass der Rang³ von $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ nicht von der Wahl der Karten abhängt. Wir können also definieren:

Definition 3.12. Der **Rang von f an der Stelle p** ist gegeben durch

$$\text{rk}(f, p) = \text{rk } D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass es Basen von \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n gibt, in denen die lokale Ableitung $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ die Form

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

annimmt, wobei $k = \text{rk}(f, p)$. Unter einer gewissen Voraussetzung gilt dies auch lokal für differenzierbare Abbildungen. Um die Voraussetzung zu verstehen, müssen wir uns kurz Gedanken darüber machen, wie der Rang sich von Punkt zu Punkt verändert kann. Das Fazit vorweg: der Rang kann, sofern er Rang nicht schon maximal ist, lokal beliebig nach oben springen, aber nicht fallen. Illustrieren lässt sich das Phänomen an der Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x^2, xy^2)$$

Wie üblich wählen wir für \mathbb{R}^2 die Identität als Karte, so dass die entsprechende lokale Ableitung mit der üblichen Ableitung von f übereinstimmt. Letztere ist gegeben durch

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$

und wir sehen

$$\text{rk}(f, (x, y)) = \begin{cases} 0, & x = y = 0 \\ 1, & x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0 \\ 2, & x \neq 0 \neq y. \end{cases}$$

Insbesondere enthält jede Nullumgebung Punkte, in denen f Rang 0, 1 oder 2 hat. Andererseits hat aber jeder Punkt vom Rang $k \in \{0, 1, 2\}$ eine Umgebung, in der der Rang von f mindestens k ist. Dies ist ein allgemeines Phänomen.

Lemma 3.13. Sei $f: M \rightarrow N$ differenzierbar. Für $p \in M$ gelte $\text{rk}(f, p) \geq k$. Dann gibt es eine Umgebung $U \subset M$ von p , so dass $\text{rk}(f, q) \geq k$ für alle $q \in U$.

³Der Rang einer linearen Abbildung ist definiert als die Dimension des Bildes.

Beweis. Sei $F = \psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}$ eine Kartendarstellung mit $\varphi_0(p) = 0$ und $F(0) = \psi_0(f(p)) = 0$, so dass der erste $k \times k$ -Block der Jacobi Matrix von F invertierbar ist. Sei $U_0 \subset M$ das Kartengebiet von φ_0 . Die Abbildung

$$m_k: U_0 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\varphi_0(q)) \right)_{i,j \leq k}$$

ist stetig, da φ_0 , alle Koordination von F und deren partielle Ableitungen sowie die Determinantenfunktion stetig sind. Die Stetigkeit von m_k und die Annahme $m_k(p) \neq 0$ garantieren, dass m_k auf einer kleineren Umgebung $U \subset U_0$ von p von Null verschieden bleibt. Insbesondere ist der Rang von f überall in U mindestens k . \square

Der nächste Satz stellt die versprochene Verallgemeinerung der Normalform von Immersionen aus [Satz 3.5](#) dar. Er beschreibt differenzierbare Abbildungen in Gebieten, in denen der Rang nicht springt. Grob gesagt sind differenzierbare Abbildungen dort lokal nichts anderes als "verzerrte" lineare Abbildungen.

Satz 3.14 (Rangatz). *Sei $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung, die auf einer offenen Teilmenge $U \subset M$ konstanten Rang k hat. Dann gibt es für jedes $p \in U$ differenzierbare Karten φ von M und ψ von N , so dass*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0).$$

Beweis. Sei $p \in U$. Wir beginnen mit einer Kartendarstellung $F = \psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}$ wie im Beweis von [Lemma 3.13](#), wobei wir zusätzlich annehmen, dass das Kartengebiet U_0 in U enthalten ist, so dass f überall in U_0 Rang $= k$ hat. Die Idee ist, die gewünschten Karten durch Vor- und Nachschaltung gewisser Diffeomorphismen φ_1 und ψ_1 von Nullumgebungen in \mathbb{R}^m , bzw. \mathbb{R}^n zu erhalten. Um den Beweis übersichtlich zu halten, sei es dem Leser überlassen, geeignete Definitions- und Zielgebiete anzugeben.

Zunächst betrachten wir die Transformation in \mathbb{R}^m

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_m) = (F_1, \dots, F_k, x_{k+1}, \dots, x_m).$$

Das vorgehen ist völlig analog zum Beweis von [Satz 1.2](#). Offensichtlich gilt $\varphi_1(0) = 0$ und wie im Beweis von [Satz 1.2](#) sieht man, dass $D\varphi_1(0)$ ein linearer Isomorphismus ist. Der Satz über lokale Invertierbarkeit ([Satz B.2](#)) liefert Nullumgebungen in \mathbb{R}^m , die von φ_1 diffeomorph ineinander überführt werden. Per Konstruktion gilt dann

$$F \circ \varphi_1^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, G_{k+1}, \dots, G_n),$$

wobei $G_i = F_i \circ \varphi_1^{-1}$, wann immer die Komposition definiert ist.

Um die störenden Komponenten G_{k+1}, \dots, G_n zu eliminieren betrachtet suchen wir nun eine geeignete Transformation in einer Nullumgebung von \mathbb{R}^n . Dabei ist es hilfreich, zu überlegen, was eventuell schon über die Funktionen G_i bekannt ist. An dieser Stelle kommt die Bedingung ins Spiel, dass f und damit auch F und $F \circ \varphi_1^{-1}$ über alle Rang $= k$ haben. Die ersten k Spalten der Jacobi Matrix

$$D(F \circ \varphi_1^{-1}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_k & 0 \\ * & \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j} \right)_{i,j > k} \end{array} \right)$$

sind offensichtlich linear unabhängig. Da die gesamte Jacobi Matrix Rang k hat, lassen sich die letzten $m - k$ Spalten als Linearkombinationen der ersten k schreiben. Wegen dem Nullblock rechts oben kommen aber nur die trivialen Linearkombinationen in Frage. Mit anderen Worten, die letzten $m - k$ Spalten sind allesamt Null und es gilt $\frac{\partial G_i}{\partial x_j} = 0$ für $i, j > k$. Insbesondere sind die Funktionen G_i bezüglich der Koordinaten x_{k+1}, \dots, x_n konstant und somit gilt

$$G_i(x_1, \dots, x_n) = G_i(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0), \quad i = k + 1, \dots, n \quad (7)$$

für alle (x_1, \dots, x_n) im Definitionsbereich von $F \circ \varphi_1^{-1}$. Mit dieser Information setzen wir nun $G = (0, \dots, 0, G_{k+1}, \dots, G_n)$ und betrachten für $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\psi_1(y) = y - G(y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0).$$

Wegen (7) gilt dann

$$\psi_1 \circ F \circ \varphi_1^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

wann immer die Komposition definiert ist. Die designierten Karten von M und N sind also $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_0$ und $\psi = \psi_1 \circ \psi_0$.

Es bleibt zu zeigen, dass ψ_1 einen Diffeomorphismus zwischen geeigneten Nullumgebungen in \mathbb{R}^n beschreibt. Man sieht leicht, dass ψ_1 in einer Nullumgebung definiert ist und $\psi_1(0) = 0$ erfüllt. Außerdem ist die Ableitung

$$D\psi_1(0) = \mathbf{1}_n - DG(0) = \mathbf{1}_n - \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline ? & 0 = \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j} \right)_{i,j>k} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_k & 0 \\ \hline -? & \mathbf{1}_{n-k} \end{array} \right)$$

offensichtlich invertierbar und wir können wie zuvor den Satz über lokale Invertierbarkeit anwenden. \square

Abschließend kommen wir noch einmal auf Immersionen zurück. Die Bedingung, dass die lokalen Ableitungen einer Abbildung $f: M \rightarrow N$ in p injektiv ist, bedeutet nichts anderes als $\text{rk}(f, p) = \dim(M)$. Insbesondere haben also Immersionen per Definition überall konstanten Rang $\dim(M)$, und der Rangsatz liefert die Normalform in Satz 3.5. Tatsächlich gilt sogar etwas mehr. Falls $\text{rk}(f, p) = \dim(M)$ für ein $p \in M$ gilt, liefert nämlich Lemma 3.13 eine Umgebung U von p , in der f mindestens Rang $\dim(M)$ hat. Andererseits kann der Rang unmöglich größer sein als $\dim(M)$, so dass f auf U konstanten Rang hat. Die Normalform in Satz 3.5 lässt sich also in U erreichen, unabhängig davon, was die lokalen Ableitungen f außerhalb von U machen.

4 Approximation stetiger Abbildungen und Homotopien

Im folgenden sind M und N stets differenzierbare Mannigfaltigkeiten, auch wenn an einigen Stellen topologische Räume genügen würden. Wir betrachten allerdings nicht nur differenzierbare, sondern auch stetige Abbildungen $f: M \rightarrow N$. Wir werden unter anderem zeigen, dass sich jede stetige Abbildung beliebig gut durch differenzierbare Abbildungen approximieren lässt. Dabei führen wir das Konzept von Homotopie ein, was den Schlüssel zur algebraischen Topologie darstellt, und sehen, dass die approximierende Abbildung sogar homotop zur ursprünglichen Abbildung gewählt werden kann. Abschließend führen wir die sogenannten Homotopiegruppen ein, die in der algebraischen Topologie eine zentrale Rolle spielen. Im weiteren Verlauf werden wir diese an diversen Stellen aufgreifen, um das Zwischenspiel von Differentialtopologie und algebraischer Topologie zu illustrieren.

4.1 Approximation \mathbb{R}^n -wertiger Abbildungen

Wir betrachten zunächst Abbildungen mit Werten in \mathbb{R}^n . In dem Fall liefert die Existenz von Zerlegungen der Eins (Satz 2.2) folgendes Resultat.

Satz 4.1. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Ferner sei für jedes $p \in M$ ein $\epsilon(p) > 0$ vorgegeben, dass stetig von p abhängt. Dann existiert eine differenzierbare Abbildung $g: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass*

$$|f(p) - g(p)| < \epsilon \quad \text{für alle } p \in M.$$

Falls f in einer offenen Umgebung einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subset M$ bereits differenzierbar ist, so kann g so gewählt werden, dass $g|_A = f|_A$ gilt.

Beweis. Das Beweiskonzept ist im Prinzip denkbar einfach. Es beruht auf zwei Ideen:

- (1) Jede stetige Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ lässt sich – im Prinzip per Definition – lokal durch konstante Abbildungen approximieren. Für gegebene $q \in M$ und $\epsilon > 0$ gibt es nämlich eine Umgebung U_q , so dass $|f(p) - f(q)| < \epsilon$ für alle $p \in U_q$. Anders ausgedrückt gilt $|f(p) - k_q(p)| < \epsilon$ wobei $k_q: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ die konstante Abbildung $k_q \equiv f(q)$ ist.
- (2) Die zweite Idee ist, eine geeignete Auswahl von konstanten Abbildungen $k_q: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu treffen, und diese mit Hilfe einer Zerlegung der Eins zu einer globalen Approximation von f zusammenzufügen.

Wie so oft ist die technische Umsetzung leider etwas frickelig. Sei also $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $\epsilon: M \rightarrow (0, \infty)$ beliebig vorgegeben. Ferner sei $A \subset U \subset M$ mit A abgeschlossen und U offen, so dass f auf U differenzierbar ist. Wir wählen zunächst eine lokal endliche Überdeckung $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ von $M \setminus A$, so dass V_β für alle β in $M \setminus A$ enthalten ist und kompakten Abschluss in M hat. Für jedes $q \in M \setminus A$ wählen wir nun eine offene Umgebung W_q in $M \setminus A$, die nur endlich viele der V_β trifft und setzen

$$\epsilon_\beta = \min\{\epsilon(p) | p \in \overline{V_\beta}\} > 0 \quad \text{und} \quad \delta_q = \min\{\epsilon_\beta | W_q \cap V_\beta \neq \emptyset\} > 0.$$

Dabei garantieren die Stetigkeit von ϵ und die Kompaktheit von $\overline{V_\beta}$ die Existenz des Minimums ϵ_β . Die Stetigkeit von f liefert eine kleinere offene Umgebung $U_q \subset W_q$ von q , so dass

$$|f(p) - f(q)| = |f(p) - k_q(p)| < \delta_q \quad \text{für alle } p \in U_q. \quad (8)$$

Wir betrachten nun die offene Überdeckung

$$M = U \cup \bigcup_{q \in M \setminus A} U_q$$

und wählen eine subordinierte Zerlegung der Eins $\{\rho_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, deren Existenz durch [Satz 2.2](#) gesichert ist. Wir setzen

$$\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda \mid \text{supp}(\rho_\lambda) \subset U\}$$

und wählen für jedes $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0$ einen Punkt q_λ , so dass $\text{supp}(\rho_\lambda) \subset U_{q_\lambda}$. Für beliebiges $\lambda \in \Lambda$ definieren wir nun Abbildungen

$$g_\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g_\lambda = \begin{cases} f, & \lambda \in \Lambda_0 \\ k_{q_\lambda} \equiv f(q_\lambda) & \lambda \notin \Lambda_0 \end{cases}$$

und fügen diese schließlich zu $g: M \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$g = \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda g_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda_0} \rho_\lambda f + \sum_{\lambda \notin \Lambda_0} \rho_\lambda k_{q_\lambda}.$$

Da f auf U differenzierbar ist und konstante Abbildungen ebenfalls differenzierbar sind, ist g differenzierbar. Für $p \in A$ und $\lambda \in \Lambda_0$ gilt außerdem $\rho_\lambda(p) = 0$, da per Konstruktion $\text{supp}(\rho_\lambda) \subset U_{q_\lambda} \subset M \setminus A$ gilt, und somit folgt

$$g(p) = \sum_{\lambda \in \Lambda_0} \rho_\lambda(p) f(p) = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda(p) \right) f(p) = f(p).$$

Also stimmt g auf A mit f überein. Es bleibt zu zeigen, dass f auf ganz M durch g approximiert wird. Zunächst gilt für beliebiges $p \in M$

$$|f(p) - g(p)| = \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda(p) f(p) - \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda(p) g_\lambda(p) \right| \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda(p) |f(p) - g_\lambda(p)|$$

Weiterhin erhalten wir für $p \in \text{supp}(\rho_\lambda) \subset U_{q_\lambda}$ aus (8) die Abschätzung

$$|f(p) - g_\lambda(p)| = |f(p) - f(q_\lambda)| < \delta_{q_\lambda} \leq \epsilon(p).$$

Beide Abschätzungen zusammen liefern schließlich

$$|f(p) - g(p)| \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda(p) \epsilon(p) = \epsilon(p). \quad \square$$

Bemerkung. Die Möglichkeit, die Approximationsgüte in Form einer Funktion ϵ zu beschreiben, ist für kompakte Mannigfaltigkeiten irrelevant, im nicht kompakten Fall jedoch wesentlich.

4.2 Homotopie und differenzierbare Homotopie

11.11.2019

Wie schon zu Beginn der Vorlesung bemerkt, war die Suche nach einem geeigneten Mannigfaltigkeitsbegriff eine wesentliche Motivation bei der Entwicklung der mengentheoretischen Topologie. Ebenso ist die algebraische Topologie inklusive all ihrer Maschinerie nicht zuletzt dazu entwickelt worden, um Fragen über Mannigfaltigkeiten zu beantworten. Es folgt die entscheidende Definition, die den Übergang von Topologie zu Algebra erlaubt.

Definition 4.2. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

(a) Eine stetige Abbildung $H: M \times [0, 1] \rightarrow N$ heißt **Homotopie**. Für festes $t \in [0, 1]$ setzen wir $h_t = H(\cdot, t): M \rightarrow N$.

(b) Eine stetige Abbildung $H: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ heißt **technische Homotopie** falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass

$$h_t = h_0 \quad \text{für } t \leq \epsilon \quad \text{und} \quad h_t = h_1 \quad \text{für } t \geq 1 - \epsilon$$

wobei $h_t = H(\cdot, t): M \rightarrow N$ wie in (a).

(c) Eine technische Homotopie $H: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$, die als Abbildung differenzierbar ist, heißt **differenzierbare Homotopie**.

(d) Zwei Abbildungen $f, g: M \rightarrow N$ heißen **(differenzierbar) homotop** falls es eine (differenzierbare) Homotopie H gibt, so dass $f = h_0$ und $g = h_1$. Wir schreiben $f \sim g$ für homotope Abbildungen und $f \sim_\infty g$ im differenzierbaren Fall.

Bemerkung. (i) Die Abbildungen $h_t: M \rightarrow N$ sind für (technische) Homotopien stetig und im differenzierbaren Fall differenzierbar. Dementsprechend sind Homotopie und differenzierbare Homotopie Relationen auf den Mengen $C(M, N)$ und $C^\infty(M, N)$ der stetigen und differenzierbaren Abbildungen von M nach N .

(ii) Alternativ kann man sich eine Homotopie $H: M \times [0, 1] \rightarrow N$ auch als eine Familie von stetigen Abbildungen

$$h_t = H(\cdot, t): M \rightarrow N, \quad t \in [0, 1]$$

vorstellen. Tatsächlich gibt es eine natürliche Topologie⁴ auf dem Raum $C(M, N)$ der stetigen Abbildungen, bezüglich welcher die Abbildung $t \mapsto h_t$ stetig ist, und eine Homotopie ist nichts anderes als ein stetiger Weg $h: [0, 1] \rightarrow C(M, N)$. Ähnliches lässt sich über technische und differenzierbare Homotopien sagen.

(iii) Wie der Name andeutet, ist die Existenzgrundlage von technischen Homotopien ein (kleineres) technisches Problem im differenzierbaren Kontext, dass uns uns gleich im Beweis von [Lemma 4.3](#) begegnen wird. Für stetige Abbildungen macht es keinen wesentlichen Unterschied, ob man mit technischen oder gewöhnlichen Homotopien arbeitet. Jede technische

⁴Die sogenannte *kompakt-offen Topologie* auf $C(M, N)$ wird erzeugt von den Mengen der Form $\{f \in C(M, N) \mid f(K) \subset O\}$ wobei $K \subset M$ kompakt und $O \subset N$ offen ist.

Homotopie $H: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ liefert durch Einschränkung auf $M \times [0, 1]$ eine gewöhnliche Homotopie. Umgekehrt kann man aus jeder gewöhnlichen Homotopie $H: M \times [0, 1] \rightarrow N$ leicht eine technische Homotopie gewinnen, indem man für ein beliebiges $\epsilon \in (0, 1/2)$ die Abbildung

$$\tilde{H}: M \times \mathbb{R} \rightarrow N, \quad (p, t) \mapsto \begin{cases} H(p, 0), & t \leq \epsilon \\ H(p, (t - \epsilon)/(1 - 2\epsilon)), & \epsilon \leq t \leq 1 - \epsilon \\ H(p, 1), & t \geq 1 - \epsilon \end{cases} \quad (9)$$

betrachtet. Anschaulich läuft hier folgender Film ab. Bevor die technische Homotopie \tilde{H} den durch H beschriebenen Weg in $C(M, N)$ durchläuft wartet sie schon seit $-\infty$ am Startpunkt h_0 . Durch das lange Warten verpasst sie den Einsatz und läuft erst zur Zeit ϵ los. Nun beeilt sich die technische Homotopie, um den Rückstand aufzuholen, überholt dabei sogar die ursprüngliche Homotopie und kommt schon zur Zeit $1 - \epsilon$ bei h_1 an. Nach dieser Anstrengung ruht sie sich bis ∞ bei h_1 aus.

Wir zeigen gleich, dass Homotopie und differenzierbare Homotopie Äquivalenzrelationen sind. Die entsprechenden Äquivalenzklassen heißen (differenzierbare) **Homotopieklassen** von Abbildungen. Die Mengen der jeweiligen Homotopieklassen bezeichnen wir mit

$$[M, N] = C(M, N) / \sim \quad \text{und} \quad [M, N]^\infty = C^\infty(M, N) / \sim_\infty .$$

Lemma 4.3. *Homotopie und differenzierbare Homotopie sind Äquivalenzrelationen auf den Mengen $C(M, N)$, bzw. $C^\infty(M, N)$.*

Beweis. Der Beweis funktioniert in allen Fällen gleich, mit einer kleinen zusätzlichen Komplikation im differenzierbaren Fall. Zunächst ist jede Abbildung $f: M \rightarrow N$ über die stationäre Homotopie $H(p, t) = f(p)$ zu sich selbst homotop. Falls ferner $H(p, t)$ eine Homotopie von f zu g ist, ist durch $H(p, 1 - t)$ eine Homotopie von g zu f gegeben. Sei schließlich G eine Homotopie von f zu g und H eine weitere Homotopie von g zu h . Dann ist die Verkettung

$$G * H(p, t) = \begin{cases} G(p, 2t), & t \leq 1/2 \\ H(p, 2t - 1), & t \geq 1/2 \end{cases} \quad (10)$$

eine Homotopie von f nach h . Alle Argumente funktionieren Wort für Wort für technische Homotopien und differenzierbare Homotopien. Der einzige Punkt, der genaueres Hinschauen erfordert, ist die Differenzierbarkeit der Verkettung differenzierbarer Homotopien nahe $t = 1/2$. Falls G und H differenzierbar sind, also insbesondere auch technisch, so sieht man leicht, dass $G * H$ nahe $t = 1/2$ stationär ist. Gilt nämlich $G(p, t) = g(p)$ für $t \leq 1 - 2\delta$ und $H(p, t) = g(p)$ für $t \leq 2\delta$, so gilt

$$G * H(p, t) = g(p) \quad \text{für } t \in (1/2 - \delta, 1/2 + \delta).$$

Damit ist die Differenzierbarkeit an der Nahtstelle gewährleistet. \square

Da differenzierbare Abbildungen und Homotopien insbesondere stetig sind, induziert die Inklusion $C^\infty(M, N) \hookrightarrow C(M, N)$ eine wohldefinierte Abbildung

$$[M, N]^\infty \longrightarrow [M, N].$$

Wir zeigen nun, dass diese bijektiv ist. Im Beweis benutzen wir so ziemlich alles, was wir bisher bewiesen haben, und darüber hinaus noch ein weiteres Resultat, das wir später beweisen werden.

Lemma 4.4. *Sei N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $S \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset N$ von S und eine differenzierbare Abbildung $\pi: U \rightarrow S$, so dass $\pi(s) = s$ für alle $s \in S$.*

Dieses Lemma wird eine direkte Konsequenz aus der Existenz sogenannter *Tubenumgebungen* sein, die wir in einem späteren Abschnitt besprechen. [Lemma 4.4](#) ist eine allgemeinere Form eines Phänomens, das wir schon im Beweis von [Lemma 3.11](#) gesehen haben. Dort hatten wir mit gewissen lokalen Projektionen auf eine gegebene Untermannigfaltigkeit gearbeitet. Tatsächlich gibt es diese in "semi-globaler" Form, das heißt global bezüglich S aber lokal bezüglich N .

Satz 4.5. *Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten.*

- (i) *Jede stetige Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist homotop zu einer differenzierbaren Abbildung.*
- (ii) *Differenzierbare Abbildungen $f, g: M \rightarrow N$ sind genau dann homotop wenn sie differenzierbar homotop sind.*

Insbesondere ist die Abbildung $[M, N]^\infty \rightarrow [M, N]$ bijektiv.

Beweis. Die Bijektivität der Abbildung $[M, N]^\infty \rightarrow [M, N]$ folgt sofort aus (i) und (ii): laut (i) ist sie surjektiv und nach (ii) injektiv. Um (i) und (ii) zu beweisen, können wir ohne Beschränkung annehmen, dass $N \subset \mathbb{R}^k$ als Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^k gegeben ist. Diese Annahme ist durch [Satz 3.2](#) und [Korollar 3.6](#) gerechtfertigt. Darüber hinaus wählen wir eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^k$ von N und eine differenzierbare Abbildung $\pi: U \rightarrow N$ wie in [Lemma 4.4](#). Von hier an liefert der Approximationsatz [4.1](#) alles weitere.

(i) Sei $f: M \rightarrow N$ stetig, aufgefasst als Abbildung $M \rightarrow \mathbb{R}^k$. [Satz 4.1](#) liefert für gegebenes $\epsilon: M \rightarrow (0, \infty)$ eine differenzierbare Approximation $g_\epsilon: M \rightarrow \mathbb{R}^k$. Innerhalb von \mathbb{R}^k haben wir ein offensichtliche Homotopie von f zu g_ϵ gegeben durch die Gerade Verbindungslinie im Vektorraum $C(M, \mathbb{R}^k)$:

$$H(p, t) = (1 - t)f(p) + tg_\epsilon(p)$$

Da $U \subset \mathbb{R}^k$ offen ist, können wir ϵ so wählen, dass $H(M \times [0, 1]) \subset U$ gilt. Durch Komposition mit $\pi: U \rightarrow N$ erhalten wir dann eine Homotopie

$$H = \pi \circ \tilde{H}: M \times [0, 1] \rightarrow N$$

von f zu der Abbildung $\pi \circ g_\epsilon$, die als Komposition differenzierbarer Abbildung ebenfalls differenzierbar ist.

(ii) Seien nun $f, g: M \rightarrow N$ differenzierbar und $H: M \times [0, 1] \rightarrow N$ eine stetige Homotopie von f zu g . Zunächst deformieren und erweitern wir H wie in [\(9\)](#) zu einer technischen Homotopie $\tilde{H}: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$, so dass $\tilde{H}(\cdot, t) = f$ für $t \leq 2\delta$ und $\tilde{H}(\cdot, t) = g$ für $t \geq 1 - 2\delta$. Insbesondere ist \tilde{H} differenzierbar auf der offenen Teilmenge $M \times (\mathbb{R} \setminus [2\delta, 1 - 2\delta])$. Wir wählen nun nach [Satz 4.1](#) für geeignetes ϵ eine Approximation $\tilde{H}_\epsilon: M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit, die auf der abgeschlossenen Teilmenge $M \times (\mathbb{R} \setminus (\delta, 1 - 2\delta))$ mit \tilde{H} übereinstimmt. Wieder gilt für kleines ϵ , dass \tilde{H}_ϵ nach U abbildet und die Komposition

$$\pi \circ \tilde{H}_\epsilon: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$$

ist dann eine differenzierbare Homotopie von f nach g . □

Der Beweis liefert nebenbei auch die noch ausstehende Approximation stetiger Abbildungen zwischen beliebigen Mannigfaltigkeiten.

Korollar 4.6. *Sei $f: M \rightarrow N$ stetig und $N \subset \mathbb{R}^k$ als Untermannigfaltigkeit gegeben. Dann gibt es für jede stetige Funktion $\epsilon: M \rightarrow (0, \infty)$ eine differenzierbare Abbildung g und sowie eine Homotopie $H: M \times [0, 1] \rightarrow N$ von f zu g , so dass*

$$|f(p) - h_t(p)| < \epsilon(p) \quad \text{für alle } (p, t) \in M \times [0, 1].$$

Bemerkung. Nach dem Einbettungssatz ist die Beschränkung auf Untermannigfaltigkeiten $N \subset \mathbb{R}^k$ in [Korollar 4.6](#) unwesentlich. Die Einbettung wird lediglich dazu benutzt, um die Approximationsgüte zu quantifizieren. Mit Hilfe der kompakt-offen Topologie könnte man die Aussage auch wie folgt ausdrücken, ohne auf eine Einbettung angewiesen zu sein:

- (1) Jedes $f \in C(M, N)$ besitzt eine Umgebung $U_f \subset C(M, N)$, so dass jedes $g \in U_f$ zu f homotop ist.
- (2) Jede Umgebung von $f \in C(M, N)$ enthält differenzierbare Abbildungen. Insbesondere ist $C^\infty(M, N)$ dicht in $C(M, N)$.

4.3 Differentialtopologie und algebraische Topologie

[Satz 4.5](#) schlägt gewissermaßen eine Brücke zwischen Differentialtopologie und der algebraischen Topologie. Auf der einen Seite haben die differenzierbaren Homotopiemengen $[M, N]^\infty$ und ihre Elemente oft interessante geometrische Beschreibungen. Auf der anderen Seite kann man die stetigen Homotopiemengen $[M, N]$ in vielen Fällen effizient mit algebraischen Methoden studieren. Dies funktioniert in der Regel nach folgendem Schema: jedem topologischen Raum M ordnet man ein algebraisches Objekt $F(M)$ (z.B. eine Gruppe) zu und jeder stetigen Abbildung $f: M \rightarrow N$ einen Homomorphismus $F(f): F(M) \rightarrow F(N)$. Dabei achtet man darauf, dass die Zuordnung $f \mapsto F(f)$ Identitätsabbildungen und Kompositionen auf ebensolche abbildet, und dass $F(f)$ nur von der Homotopieklasse von f abhängt. Kurz gesagt, es soll gelten

$$F(\text{id}) = \text{id}, \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad \text{und} \quad f \sim g \Rightarrow F(f) = F(g).$$

Eine solche Zuordnungsvorschrift F nennt man einen homotopieinvarianten (kovarianten) Funktor. Jedes solche F liefert dann eine Abbildung

$$[M, N] \longrightarrow \text{Hom}(F(M), F(N))$$

deren Bild man sich als algebraischen Schatten von $[M, N]$ vorstellen kann. Beide Aspekte, Geometrie und Algebra, gehen oft Hand in Hand. In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns hauptsächlich mit der geometrischen Seite. Dennoch werden sich allerdings diverse Berührungspunkte mit der algebraischen Topologie ergeben.

Wir besprechen nun eine wichtige Reihe von Beispielen von homotopieinvarianten Funktoren. In der algebraischen Topologie arbeitet man häufig mit einer leicht verschärften Form von Homotopie.

Definition 4.7. (a) Ein **punktierter Raum** $(X, *_X)$ ist ein topologischer Raum X mit einem ausgezeichneten **Basispunkt** $*_X \in X$.

(b) Eine **punktierte Abbildung** $f: (X, *_X) \rightarrow (Y, *_Y)$ ist eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit $f(*_X) = *_Y$.

(c) Eine **punktierte Homotopie** ist Homotopie $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, für die $H(*_X, t) = *_Y$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt.

Bemerkung. Die genauen Basispunkte ergeben sich meist aus dem Zusammenhang oder sind zu einem gewissen Grad irrelevant. Sie werden deswegen oftmals pauschal für alle Räume mit $*$ bezeichnet. Zum Beispiel ist in \mathbb{R}^n der Nullpunkt die naheliegende Wahl für den Basispunkt. Für S^n wählen wir den Nordpol $(0, \dots, 0, 1)$, aber jede andere Wahl wäre genau so nützlich.

Die Menge der punktierten Homotopieklassen punktierter Abbildungen bezeichnen wir mit $[X, Y]_0$. Völlig analog definiert man für differenzierbare Mannigfaltigkeiten M, N mit ausgezeichneten Basispunkten differenzierbare Homotopiemengen $[M, N]_0^\infty$ und eine minimale Modifikation des Beweises von [Satz 4.5](#) liefert eine Bijektion $[M, N]_0^\infty \cong [M, N]_0$.

Definition 4.8. Sei X ein punktierter Raum. Für $n \geq 0$ definieren wir die **n te Homotopiegruppe**

$$\pi_n(X) = [S^n, X]_0.$$

Für eine stetige punktierte Abbildung $f: X \rightarrow Y$ definieren wir

$$f_*: \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y), \quad [\lambda: S^n \rightarrow X] \mapsto [f \circ \lambda: S^n \rightarrow Y].$$

Es ist relativ offensichtlich, dass die Zuordnung $F(X) = \pi_n(X)$ und $F(f) = f_*$ die oben beschriebenen Eigenschaften hat. Hier einige knappe Bemerkungen zu der algebraischen Natur der Homotopiegruppen:

- Die Menge $\pi_0(X) = [S^0, X]$ ist nicht mehr als eine komplizierte Beschreibung der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X . Eine kanonische Bijektion ist dadurch gegeben, dass man $\lambda \in \pi_0(X)$ repräsentiert durch eine punktierte Abbildung $\tilde{\lambda}: S^0 \rightarrow X$ die Wegzusammenhangskomponente von $\lambda(-1) \in X$ Zuordnet. (Zur Erinnerung: es ist $S^0 = \{\pm 1\} \subset \mathbb{R}$ mit $1 \in S^0$ als Basispunkt.) Hierbei handelt es sich tatsächlich nicht um eine Gruppe.
- Die Menge $\pi_1(X) = [S^1, X]_0$ ist auch als **Fundamentalgruppe** von X bekannt. Die Gruppenstruktur ist durch das Verketteten von geschlossenen Wegen gegeben. Diese wird üblicherweise in der Vorlesung *Geometrie und Topologie* behandelt.
- Für $n \geq 2$ ist $\pi_n(X)$ sogar eine Abelsche Gruppe. Die Gruppenstruktur lässt sich grob wie folgt beschreiben. Gegeben seien punktierte Abbildungen $\lambda, \mu: S^n \rightarrow X$. Sei $S_0^{n-1} = \{x \in S^n \mid x_1 = 0\}$. Dann besteht der Quotientenraum S^n/S_0^{n-1} intuitiv aus zwei Kopien von S^n , die an ihre Basispunkten zusammengeklebt sind. In der Topologie bezeichnet man diese Basispunktsumme mit $S^n \vee S^n$. Nun definieren man eine Abbildung $\lambda \wedge \mu: S^n \vee S^n \rightarrow X$, in dem man auf der einen Sphäre λ und auf der anderen μ anwendet. Schließlich definiert man die Summe $\lambda + \mu: S^n \rightarrow X$ als die Komposition

$$S^n \xrightarrow{c} S^n/S_0^{n-1} \cong S^n \vee S^n \xrightarrow{\lambda \vee \mu} X$$

wobei $c: S^n \rightarrow S^n/S_0^{n-1}$ die Quotientenabbildung ist.

Selbstverständlich muss man noch nachweisen, dass die skizzierten Konstruktionen tatsächlich für $n \geq 1$ wohldefinierte Gruppenoperationen auf $\pi_n(X)$ liefern. Für diese Nachweise und mehr sei auf die Vorlesung *Algebraische Topologie* und [Bre93] verwiesen.

Eine besondere Rolle spielen die **Homotopiegruppen von Sphären** $\pi_m(S^n)$, die in der algebraischen Topologie eine ähnlich zentrale Rolle einnehmen wie die natürlichen Zahlen in der Zahlentheorie. Die Methoden der Differentialtopologie liefern einige geometrische Möglichkeiten, Homotopiegruppen teilweise zu verstehen oder zumindest zu beschreiben. Hier einige Beispiele, die wir in späteren Kapiteln näher betrachten werden:

- Für $m < n$ gilt $\pi_m(S^n) = 0$.
- Für $n \geq 1$ gilt $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.
- Es gilt $\pi_3(S^2) \cong \{\text{gerahmte Verschlingungen in } S^3\}/\text{gerahmter Bordismus} \cong \mathbb{Z}$.

Insbesondere der letzte Punkt liefert eine schöne Illustration des Zwischenspiels von Geometrie und Algebra. Außerdem kommen in dieser Korrespondenz alle differentialtopologischen Werkzeuge zum Einsatz, die wir besprechen werden.

5 Tangentialvektoren und Differentiale

Ein zentraler Aspekt der Differentialtopologie und -geometrie ist das Zwischenspiel von globalen, lokalen und infinitesimalen Eigenschaften differenzierbarer Mannigfaltigkeiten und Abbildungen. Bisher haben wir hauptsächlich globale und lokale Aspekte behandelt. In die Kategorie global fallen zum Beispiel die Existenz von Zerlegungen der Eins und der Einbettungssatz, während der Rangsatz und seine Folgerungen zu der Kategorie lokal zählen. Der infinitesimale Aspekt ist uns bisher nur in Form der lokalen Ableitungen begegnet. Dabei ist ein gewisser Mangel an Eleganz nicht von der Hand zu weisen. Um diesen zu beseitigen fehlt uns eine infinitesimale Version von Mannigfaltigkeiten.

	Mannigfaltigkeit M	Abbildung $f: M \rightarrow N$
global	ganz M	ganz f
lokal	Kartengebiet $U \subset M$	Kartendarstellung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$
infinitesimal	???	lokale Ableitung $D(\psi \circ f \circ \varphi)(\varphi(p))$

Die infinitesimale Version einer m -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M in einem Punkt $p \in M$ nennt man den **Tangentialraum** $T_p M$. Dies ist ein m -dimensionaler Vektorraum und seine Elemente $v \in T_p M$ heißen **Tangentialvektoren**. Tangentialvektoren sind – wie vieles in der Mathematik – eine Manifestation einer intuitiven Idee, die sich auf mehrere Arten und Weisen formalisieren lässt. Wir besprechen vier Beschreibungen und ihre Zusammenhänge. Mit Hilfe der Tangentialräume können wir die Vielzahl der globalen Ableitungen einer Abbildung $f: M \rightarrow N$ in $p \in M$ zu dem **Differential von f in p**

$$df|_p: T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$$

zusammenfassen. Die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume heißt das **Tangentialbündel**

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M$$

und die punktweisen Differentiale von $f: M \rightarrow N$ setzen sich zum (globalen) **Differential**

$$df: TM \longrightarrow TN, \quad df|_{T_p M} = df|_p$$

zusammen. Wir werden später noch sehen, dass TM in natürlicher Weise eine $2m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit bildet, und dass df selbst wieder eine differenzierbare Abbildung ist.

5.1 Vier Arten, Tangentialvektoren zu beschreiben

Es gibt im Wesentlichen vier geläufige Möglichkeiten, Tangentialvektoren $v \in T_p M$ zu beschreiben, die wir im Folgenden besprechen:

- **über Einbettungen:** als Elemente eines „tangentialen“ Untervektorraums in einem \mathbb{R}^k
- **Lokal:** als „Richtungsvektoren“ in Kartendarstellungen
- **Geometrisch:** als „Geschwindigkeitsvektoren“ von Kurven
- **Algebraisch/Analytisch:** als „Richtungsableitungen“ von Funktionen

Dabei müssen die Begriffe in Anführungszeichen allesamt noch mit Sinn gefüllt werden. Zumindest für endlich dimensionale Mannigfaltigkeiten sind alle Sichtweisen äquivalent. Jede hat ihre Vor- und Nachteile und es ist nützlich, alle zu beherrschen.

Tangentialräume von Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^k

Wir betrachten zunächst eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^k$. Es ist anschaulich einleuchtend, dass es für jeden Punkt $p \in M$ einen m -dimensionalen Untervektorraum $T_p^{\text{emb}}M \subset \mathbb{R}^k$ gibt, so dass der affine Raum $p + T_pM$ tangential an M anliegt. Intuitiv gilt

$$T_p^{\text{emb}}M = \{\text{Richtungen, in die man sich von } p \text{ aus in } M \text{ bewegen kann}\}.$$

Selbstverständlich ist dies nicht im Ansatz eine präzise Definition. Wir werden später sehen, wie man diese **eingebetteten Tangentialräume** konkreter beschreiben kann. Für den Moment nehmen wir die beschriebene Idee lediglich als Motivation. Hier zwei anschauliche Beispiele:

Beispiel 5.1. (a) Für $p \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sollte offensichtlich

$$T_p^{\text{emb}}S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, v \rangle = 0\}$$

gelten. Wir werden später sehen, wie diese Identifikation aus der Theorie entsteht.

(b) Für eine offene Teilmenge $p \in U' \subset \mathbb{R}^m$ sollte $T_pU' = \mathbb{R}^m$ gelten.

Die angedeutete Beschreibung von $T_p^{\text{emb}}M$ hängt offensichtlich zunächst von der konkreter Lage von M in \mathbb{R}^k ab. Auch wenn dies vielleicht etwas überraschend ist, existieren Tangentialräume auch unabhängig von jeglicher Einbettung.

Lokale Tangentialvektoren

Sei nun M eine abstrakte m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, die a priori nicht in einen Euklidischen Raum eingebettet ist, und $p \in M$ ein fest gewählter Punkt. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{S}_p^M := \{\text{differenzierbare Karten } \varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m \text{ von } M \text{ mit } p \in U\}.$$

Ein hypothetischer Tangentialvektor $v \in T_pM$ sollte in jeder Karte $\varphi \in \mathcal{S}_p^M$ einem Vektor $v_\varphi \in \mathbb{R}^m$ entsprechen, den wir uns als Pfeil mit Startpunkt $\varphi(p)$ denken, und v sollte durch die Darstellung v_φ eindeutig festgelegt sein. Insbesondere sollte für jede weitere Karte $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}_p^M$ der entsprechende Vektor $v_{\tilde{\varphi}} \in \mathbb{R}^m$ durch v_φ beschreibbar sein.

Wie sollte dieser Zusammenhang aussehen? Wir geben $v_\varphi \in \mathbb{R}^m$ vor und suchen einen Kandidaten für $v_{\tilde{\varphi}}$. Wir betrachten dazu für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ die differenzierbare Kurve

$$\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U', \quad \gamma(t) = \varphi(p) + tv_\varphi$$

im Bildbereich $U' \subset \mathbb{R}^m$ von φ . Den Parameter t stellen wir uns ein Zeit vor. Die Kurve γ beschreibt ein Segment der Gerade durch $\varphi(p)$ mit Richtungsvektor v_φ . Wir erinnern uns kurz daran, dass der Richtungs- oder Geschwindigkeitsvektor einer Kurve γ in \mathbb{R}^m zur Zeit $t = 0$ als zeitliche Ableitung

$$\dot{\gamma}(0) = \frac{d\gamma}{dt}(0) = D\gamma(0) \in \mathbb{R}^m$$

gegeben ist.

Bemerkung. Hierbei erlauben wir uns, die Ableitung $D\gamma(0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, die a priori eigentlich gar kein Vektor ist, implizit mit dem Bild des kanonischen Basisvektors $e_1 = 1 \in \mathbb{R}$ zu identifizieren. Formal korrekt müssten wir eigentlich $\dot{\gamma}(0) = D\gamma(0)e_1$ oder $\dot{\gamma}(0) = D\gamma(0)1$ schreiben.

Im konkreten Fall $\gamma(t) = \varphi(p) + tv_\varphi$ für gegebenes $v_\varphi \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\gamma(0) = \varphi(p) \quad \text{und} \quad \dot{\gamma}(0) = \frac{d\gamma}{dt}(0) = v_\varphi.$$

Durch Komposition mit dem Kartenwechsel $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ erhalten wir eine weitere differenzierbare Kurve

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \circ \gamma: (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \tilde{U}' \subset \mathbb{R}^m, \quad \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv_\varphi).$$

Offensichtlich gilt $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\varphi}(p)$ und der Geschwindigkeitsvektor dieser Kurve in $t = 0$ ist ein natürlicher Kandidat für $v_{\tilde{\varphi}}$. Letzteren können wir mit der Kettenregel berechnen und erhalten

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\gamma}}(0) &= D(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \circ \gamma)(0) \\ &= D(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) D\gamma(0) \\ &= D(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) v_\varphi. \end{aligned}$$

Diese Beobachtung machen wir nun zu einer Definition.

Definition 5.2. Sei M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für $p \in M$ definieren wir den **lokalen Tangentialraum** als

$$T_p^{\text{lok}} M := \{v: \mathcal{S}_p^M \rightarrow \mathbb{R}^m \mid v_{\tilde{\varphi}} = D(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))v_\varphi \text{ für alle } \varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{S}_p\}.$$

Die Elemente von $T_p^{\text{lok}} M$ heißen **lokale Tangentialvektoren**.

Ein lokaler Tangentialvektor $v: \mathcal{S}_p^M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ordnet also jeder differenzierbaren Karte um p auf systematische Weise einen Vektor in \mathbb{R}^m zu. Aus dem eingebauten Transformationsverhalten unter Kartenwechseln folgt sofort, dass v durch die Auswertung in einer einzigen Karte vollständig festgelegt ist. Außerdem ist $T_p^{\text{lok}} M$ per Definition eine Teilmenge des \mathbb{R} -Vektorraums $\text{Abb}(\mathcal{S}_p, \mathbb{R}^m)$.

Lemma 5.3. $T_p^{\text{lok}} M$ ist ein Untervektorraum von $\text{Abb}(\mathcal{S}_p, \mathbb{R}^m)$ und für jede Karte $\varphi \in \mathcal{S}_p$ ist die Auswertungsabbildung

$$\text{ev}_\varphi: T_p^{\text{lok}} M \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad v \mapsto v_\varphi$$

ein linearer Isomorphismus.

Beweis. Die Bijektivität von ev_φ ergibt sich, wie eben erläutert, aus der Konstruktion von $T_p^{\text{lok}} M$. Die lineare Natur von $T_p^{\text{lok}} M$ und ev_φ folgt hingegen leicht aus der Linearität der Ableitungen $D(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$. \square

Die lokalen Tangentialräume sind auch dafür geeignet, um die ganzen lokalen Ableitungen einer differenzierbaren Abbildung $f: M \rightarrow N$ zu einem einzigen Objekt zusammenzufassen.

Lemma 5.4. Sei $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung und $p \in M$. Es gibt eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $d_p^{\text{lok}} f: T_p^{\text{lok}} M \rightarrow T_{f(p)}^{\text{lok}} N$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_p^{\text{lok}} M & \xrightarrow{d_p^{\text{lok}} f} & T_{f(p)}^{\text{lok}} N \\ \text{ev}_\varphi \downarrow & & \downarrow \text{ev}_\psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))} & \mathbb{R}^n \end{array} \quad (11)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}_p^M$ und $\psi \in \mathcal{S}_{f(p)}^N$ kommutiert.

Wir nennen $d_p^{\text{lok}} f$ das **lokale Differential von f in p** .

Beweis. Wir definieren $d_p^{\text{lok}} f$ durch (11) für eine feste Wahl von φ und ψ . Damit dies wohldefiniert ist, muss folgendes Diagramm kommutieren:

$$\begin{array}{ccccc}
& & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))} & \mathbb{R}^n & & \\
& \swarrow \text{ev}_\varphi & & & & & \swarrow \text{ev}_\psi \\
T_p^{\text{lok}} M & & & & & & T_{f(p)}^{\text{lok}} N \\
& \searrow \text{ev}_{\tilde{\varphi}} & & & & & \searrow \text{ev}_{\tilde{\psi}} \\
& & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{D(\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1})(\tilde{\varphi}(p))} & \mathbb{R}^n & &
\end{array}$$

Um dies zu sehen, sei $v \in T_p^{\text{lok}} M$ vorgegeben und $w \in T_{f(p)}^{\text{lok}} N$ der eindeutig bestimmt lokale Tangentialvektor mit

$$w_\psi = D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))v_\varphi.$$

Aus den Definitionen und der Kettenregel folgt dann

$$\begin{aligned}
w_{\tilde{\psi}} &= D(\tilde{\psi} \circ \psi^{-1})(\psi(f(p)))w_\psi \\
&= D(\tilde{\psi} \circ \psi^{-1})(\psi(f(p)))D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))v_\varphi \\
&= D(\tilde{\psi} \circ \psi^{-1})(\psi(f(p)))D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))D(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})(\tilde{\varphi}(p))v_{\tilde{\varphi}} \\
&= D(\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1})(\tilde{\varphi}(p))v_{\tilde{\varphi}},
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. \square

Die lokalen Tangentialräume und Differentiale liefern letztendlich nichts anderes als einen systematischen Formalismus, die Information aller möglicher Karten auf einmal zu betrachten, und sich bei Bedarf auf eine einzelne Kartenwahl einzuschränken. Für praktische und theoretische Zwecke ist diese Beschreibung sehr nützlich. Sonderlich anschaulich ist sie allerdings nicht.

Geometrische Tangentialvektoren

Um eine geometrische Perspektive auf Tangentialvektoren zu bekommen, lenken wir nun das Scheinwerferlicht auf Kurven statt auf Karten. Für M und p wie im vorigen Abschnitt betrachten wir die Menge

$$\mathcal{K}_p^M := \{\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \mid \epsilon > 0, \gamma \text{ differenzierbar}, \gamma(0) = p\}$$

aller differenzierbaren Kurven durch p . Genau wie in \mathbb{R}^m sollte jede Kurve aus \mathcal{K}_p^M sollte eindeutig einen Tangentialvektor festlegen, den wir uns als Geschwindigkeitsvektor vorstellen wollen. Da es das Konzept von Vektor allerdings in, bzw. an M a priori nicht gibt, müssen wir uns überlegen, wie wir es sinnvoll erklären könnten. Dazu benutzen wir Karten, die hier allerdings die Nebenrolle einnehmen.

Lemma 5.5. *Für $\gamma, \tilde{\gamma} \in \mathcal{K}_p^M$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) *Es gilt $D(\varphi \circ \gamma)(0) = D(\varphi \circ \tilde{\gamma})(0)$ für eine Karte $\varphi \in \mathcal{S}_p^M$.*
- (ii) *Es gilt $D(\varphi \circ \gamma)(0) = D(\varphi \circ \tilde{\gamma})(0)$ für alle Karten $\varphi \in \mathcal{S}_p^M$.*
- (iii) *Es gilt $(f \circ \gamma)'(0) = (f \circ \tilde{\gamma})'(0)$ für alle $f \in C^\infty(M)$.*

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt sofort aus der Kettenregel. Die Äquivalenz von (i) und (iii) ist weniger offensichtlich. Da wir jede Karte $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ als m -Tupel $\varphi = (x_1^\varphi, \dots, x_m^\varphi)$ der Komponentenfunktionen $x_i^\varphi \in C^\infty(U)$ auffassen können. Mit Hilfe einer geeigneten Abschneidefunktion $\rho: M \rightarrow [0, 1]$, die Träger in U hat und in einer Umgebung von p konstant 1 ist, können wir ρx_i^φ zu Funktionen $\tilde{x}_i^\varphi \in C^\infty(M)$ auf ganz M fortsetzen. Falls (iii) für alle \tilde{x}_i^φ gilt dann (i) für φ , da die auftauchenden Ableitungen in

beliebig kleinen Umgebungen von p bestimmt sind. Schließlich gelte (ii) Für beliebig $\varphi \in \mathcal{S}_p^M$ und $f \in C^\infty(M)$ gilt dann

$$(f \circ \gamma)'(0) = D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) D(\varphi \circ \gamma)(0).$$

Falls die lokale Ableitung $D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ verschwindet, ist die Bedingung in (iii) trivial erfüllt. Andernfalls kann man zeigen, dass eventuell nach umsordieren der Komponenten von φ durch $\tilde{\varphi} = (f, x_2^\varphi, \dots, x_m^\varphi)$ in einer Umgebung von p eine differenzierbare Karte gegeben ist. Die Bedingung in (ii) für $\tilde{\varphi}$ liefert dann insbesondere die in (iii) für f . \square

Wir nennen zwei Kurven $\gamma, \tilde{\gamma} \in \mathcal{K}_p^M$ **tangential in p** , im Zeichen $\gamma \sim_p \tilde{\gamma}$, falls eine (und damit alle) der Bedingungen in [Lemma 5.5](#) erfüllt ist. Aus dieser Definition ist sofort ersichtlich, dass \sim_p eine Äquivalenzrelation auf \mathcal{K}_p^M ist.

Definition 5.6. Wir definieren den **geometrischen Tangentialraum** als

$$T_p^{\text{geo}}M = \mathcal{K}_p^M / \sim_p .$$

Elemente von $T_p^{\text{geo}}M$ heißen **geometrische Tangentialvektoren**. Den durch $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ dargestellten Vektor bezeichnen wir mit v_γ , $[\gamma]_p$ oder $\dot{\gamma}(0)$.

Der Name Vektor muss bei dieser Konstruktion allerdings noch gerechtfertigt werden. Sei dazu $\varphi \in \mathcal{S}_p^M$ eine Karte um p . Für $v \in \mathbb{R}^m$ ist dann durch

$$\gamma_\varphi^v(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)$$

eine Kurve $\gamma_\varphi^v \in \mathcal{K}_p^M$ gegeben. Wir betrachten die Abbildung

$$\kappa_\varphi: \mathbb{R}^m \longrightarrow T_p^{\text{geo}}M, \quad \kappa_\varphi(v) = \dot{\gamma}_\varphi^v(0).$$

Lemma 5.7. *Es gibt eine eindeutig bestimmte Vektorraumstruktur auf $T_p^{\text{geo}}M$, so dass κ_φ für alle $\varphi \in \mathcal{S}_p^M$ ein linearer Isomorphismus ist.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass κ_φ bijektiv ist. Offensichtlich gilt $\varphi \circ \gamma_\varphi^v(t) = \varphi(p) + tv$ und somit

$$D\varphi \circ \dot{\gamma}_\varphi^v(0) = v.$$

Für $w \neq v$ gilt insbesondere $D\varphi \circ \dot{\gamma}_\varphi^w(0) \neq D\varphi \circ \dot{\gamma}_\varphi^v(0)$ und somit $\kappa_\varphi(w) \neq \kappa_\varphi(v) \neq 0$, so dass κ_φ injektiv ist. Für die Surjektivität sei $\gamma \in \mathcal{K}_p^M$ gegeben. Dann gilt

$$v := D(\varphi \circ \gamma)(0) = D(\varphi \circ \gamma_\varphi^v(0))$$

und somit $\dot{\gamma}(0) = \kappa_\varphi(0)$.

Mit dem Wissen, dass κ_φ für jedes φ bijektiv ist, definieren wir eine Vektorraumstruktur auf $T_p^{\text{geo}}M$ indem wir κ_φ für ein einzelnes φ zu einem linearen Isomorphismus erklären. Explizit sind die Vektorraumoperationen wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} [\gamma]_p + [\tilde{\gamma}]_p &:= \kappa_\varphi(\kappa_\varphi^{-1}([\gamma]_p) + \kappa_\varphi^{-1}([\tilde{\gamma}]_p)) \\ &= [\varphi^{-1}(\varphi \circ \gamma + \varphi \circ \tilde{\gamma})]_p \\ \lambda \cdot [\gamma]_p &:= \kappa_\varphi(\lambda \cdot \kappa_\varphi^{-1}([\gamma]_p)) \\ &= [\varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi \circ \gamma)]_p. \end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, dass $\kappa_{\tilde{\varphi}}$ auch für jedes andere $\tilde{\varphi}$ ein linearer Isomorphismus ist. Dies folgt aus der Identifikation

$$\kappa_\varphi^{-1} \circ \kappa_{\tilde{\varphi}} = D(\varphi \circ \varphi^{-1})(\tilde{\varphi}(p)),$$

die wir nun herleiten. Der Kürze halber sei $\Lambda = D(\varphi \circ \varphi^{-1})(\tilde{\varphi}(p))$. Wir müssen dann für beliebiges $v \in \mathbb{R}^m$ zeigen, dass

$$\gamma_\varphi^v \sim_p \gamma_{\tilde{\varphi}}^{\Lambda v}$$

gilt. Wir testen dies in der Karte φ und erhalten

$$\begin{aligned} D(\varphi \circ \gamma_{\tilde{\varphi}}^{\Lambda v})(0) &= D(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ (t \mapsto \tilde{\varphi}(p) + t\Lambda v))(0) \\ &= \underbrace{D(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})(\tilde{\varphi}(p))}_{=\Lambda^{-1}} D(t \mapsto \tilde{\varphi}(p) + t\Lambda v)(0) \\ &= \Lambda^{-1}\Lambda v = v = D(\varphi \circ \gamma_\varphi^v)(0), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. \square

Während das lokale Differential eine wüste Sammlung von lokalen Ableitungen ist, entsteht das **geometrische Differential**

$$d_p^{\text{geo}} f: T_p^{\text{geo}} M \longrightarrow T_{f(p)}^{\text{geo}} N$$

sehr natürlich aus der offensichtlichen Beobachtung, dass durch Komposition

$$(-\epsilon, \epsilon) \xrightarrow{\gamma} M \xrightarrow{f} N$$

einer differenzierbaren Kurve γ in M mit einer differenzierbaren Abbildung $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Kurve $f \circ \gamma$ in N entsteht. Diese Konstruktion liefert eine Abbildung

$$f_*: \mathcal{K}_p^M \longrightarrow \mathcal{K}_{f(p)}^N, \quad f_*(\gamma) = f \circ \gamma,$$

Mit Hilfe der Kettenregel sieht man leicht, dass

$$\gamma \sim_p \tilde{\gamma} \implies f \circ \gamma \sim_{f(p)} f \circ \tilde{\gamma}$$

gilt, so dass wir das geometrische Differential wie definieren können als

$$d_p^{\text{geo}} f(\dot{\gamma}(0)) = (f_* \dot{\gamma})(0) = (f \circ \dot{\gamma})(0)$$

Das geometrische Differential schiebt also im wesentlichen Kurven auf Kurven, wobei es sich in Urbild- und Bildbereich nur die „Richtung“ merkt, die durch die Relation \sim_p modelliert wird. Von diesem Standpunkt ist es vielleicht etwas überraschend, dass auch das geometrische Differential alle lokalen Ableitungen einer Abbildung bündelt.

Lemma 5.8. *Sei $f: M \rightarrow N$ differenzierbar. Folgendes Diagramm ist für alle Karten $\varphi \in \mathcal{S}_p^M$ und $\psi \in \mathcal{S}_{f(p)}^N$ kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} T_p^{\text{geo}} M & \xrightarrow{d_p^{\text{geo}} f} & T_{f(p)}^{\text{geo}} N \\ \kappa_\varphi \uparrow & & \uparrow \kappa_\psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))} & \mathbb{R}^n \end{array} \quad (12)$$

Beweis. Der Beweis ist ähnlich wie der von [Lemma 5.7](#). \square

Algebraische Tangentialvektoren

Der Vollständigkeit halber betrachten wir noch einen weit verbreiteten Zugang zu Tangentialvektoren. Dieser basiert weder auf Karten noch auf Kurven, sondern auf der Algebra $C^\infty(M)$ der differenzierbaren Funktionen auf M .

Definition 5.9. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Eine **Derivation bei p** von $C^\infty(M)$ ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\delta: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $g, h \in C^\infty(M)$ gilt

$$\delta[g \cdot h] = g(p) \cdot \delta[h] + \delta[g] \cdot h(p).$$

Der **algebraische Tangentialraum** $T_p^{\text{alg}}M$ ist die Menge aller Derivationen bei p .

Für differenzierbares $f: M \rightarrow N$ ist das **algebraische Differential**

$$d_p^{\text{alg}}f: T_p^{\text{alg}}M \longrightarrow T_{f(p)}^{\text{alg}}N$$

ähnlich wie das geometrische Pendant definiert über die Komposition

$$f^*: C^\infty(N) \longrightarrow C^\infty(M), \quad f^*(g) = g \circ f,$$

die dieses mal allerdings an der anderen Seite stattfinden. Es gilt

$$d_p^{\text{alg}}f(\delta) = \delta \circ f^*$$

Konkret ist der Wert von $d_p^{\text{alg}}f(\delta)$ an einer Funktion $g \in C^\infty(M)$ gegeben als

$$d_p^{\text{alg}}f(\delta)[g] = \delta[g \circ f].$$

Man rechnet leicht nach, dass $d_p^{\text{alg}}f(\delta)$ wieder eine Derivation ist. Folgendes Lemma ist relativ offensichtlich.

Lemma 5.10. $T_p^{\text{alg}}M$ ist ein Untervektorraum von $\text{Hom}(C^\infty(M), \mathbb{R})$ und $d_p^{\text{alg}}f$ ist eine lineare Abbildung.

Was allerdings weniger offensichtlich ist, ist die Tatsache, dass $T_p^{\text{alg}}M$ endlich dimensional ist, und was $d_p^{\text{alg}}f$ mit den lokalen Ableitungen zu tun haben sollte. An dieser Stelle rächt sich die Eleganz der Definitionen und wir müssen arbeiten. Da wir im weiteren Verlauf hauptsächlich mit den geometrischen und lokalen Beschreibungen arbeiten, skizzieren wir nur die Argumente

Wir schlagen zunächst die Brücke zu den anderen Konstruktionen. Sei $\gamma \in \mathcal{K}_p^M$ eine Kurve und $v = \dot{\gamma}(0)$ der entsprechende geometrische Tangentialvektor. Dann ist durch die **Richtungsableitung**

$$\partial_v: C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \partial_v[g] = (g \circ \gamma)'(0)$$

eine wohldefinierte Derivation bei p gegeben, was sofort aus den Ableitungsregeln aus Analysis 1 folgt. Diese Konstruktion liefert eine Abbildung

$$\partial: T_p^{\text{geo}}M \longrightarrow T_p^{\text{alg}}M, \quad v \mapsto \partial_v.$$

Ähnlich erhält man aus einer Karte $\varphi \in \mathcal{S}_p^M$ und einem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ eine Derivation

25.11.2019

$$\delta_v^\varphi: C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \delta_v^\varphi[g] = D(g \circ \varphi^{-1})v$$

und somit eine Abbildung

$$\partial^\varphi: \mathbb{R}^m \longrightarrow T_p^{\text{alg}}M, \quad v \mapsto \delta_v^\varphi.$$

Für die Standardbasisvektoren $v = e_i$ schreiben wir kurz ∂_i^φ . Für diese Derivationen sieht man auch häufig die Notation

$$\partial_i^\varphi = \left. \frac{\partial}{\partial x_i^\varphi} \right|_p \quad \text{und} \quad \partial_i^\varphi[g] = \frac{\partial g}{\partial x_i^\varphi}(p)$$

wobei $\varphi = (x_1^\varphi, \dots, x_m^\varphi)$ die Karte in Komponenten geschrieben ist.

Satz 5.11. Sei M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow N$ differenzierbar.

- (i) Die Abbildung ∂^φ ist für jede Karte $\varphi \in \mathcal{S}_p^M$ ein linearer Isomorphismus. Insbesondere ist $T_p^{\text{alg}}M$ ein m -dimensionaler Vektorraum.
- (ii) Die Abbildung ∂ ist ein linearer Isomorphismus.
- (iii) Folgende Diagramme sind kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}
 T_p^{\text{geo}}M & \xrightarrow{d_p^{\text{geo}}f} & T_{f(p)}^{\text{geo}}N \\
 \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\
 T_p^{\text{alg}}M & \xrightarrow{d_p^{\text{alg}}f} & T_{f(p)}^{\text{alg}}N
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T_p^{\text{alg}}M & \xrightarrow{d_p^{\text{alg}}f} & T_{f(p)}^{\text{alg}}N \\
 \partial^\varphi \uparrow & & \uparrow \partial^\psi \\
 \mathbb{R}^m & \xrightarrow{D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))} & \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

Beweis. Der schwierige Teil ist der Beweis von (i), alles andere sind längliche Routinechecks. Wir skizzieren nur das Argument. Sei $\varphi = (x_1^\varphi, \dots, x_m^\varphi) \in \mathcal{S}_p^M$ eine Karte um p mit Komponentenfunktionen x_i^φ . Wie im Beweis von [Lemma 5.5](#) seien $\tilde{x}_i^\varphi \in C^\infty(M)$ auf ganz M definierte Funktionen, die in der Nähe von p mit den x_i^φ übereinstimmen. Folgende Schritte sind nötig:

- (1) Wenn g konstant ist gilt für jede Derivation $\delta[g] = 0$.
- (2) Wenn g und h in einer Umgebung von p übereinstimmen gilt $\delta[g] = \delta[h]$.
- (3) Es gibt eine Umgebung $U_0 \subset U$ von p , so dass es für alle $g \in C^\infty(M)$ Funktionen $g_i \in C^\infty(U_0)$, so dass auf U_0 gilt

$$g = g(p) + \sum_{i=1}^m (x_i^\varphi - x_i^\varphi(p)) \cdot g_i.$$

- (4) Für $\partial_i^\varphi = \partial_{e_i}^\varphi$ gilt $\partial_i^\varphi[\tilde{x}_i^\varphi] = \delta_{ij}$.

Die Schritte (1) und (4) sind einfach. Für (2) muss man geschickt mit Abschneidefunktionen arbeiten. Für (3) benutzt man, dass die Beobachtung, dass

$$g(q) - g(p) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f \circ \varphi^{-1})(t\varphi(q) + (1-t)\varphi(p))$$

für alle q gilt, so dass das Streckensegment zwischen $\varphi(q)$ und $\varphi(p)$ ganz im Bildbereich von φ enthalten ist. Schließlich kann man auf all dem aufbauend zeigen, dass die Derivationen ∂_i^φ eine Basis von $T_p^{\text{alg}}M$ bilden. Mehr Details sind bei [\[BJ82\]](#) und [\[Lee13\]](#) zu finden. \square

Definition 5.12. Die Derivationen $\partial_1^\varphi, \dots, \partial_m^\varphi \in T_p^{\text{alg}}M$ heißen die **Koordinatenvektoren** der Karte φ . Zusammen bilden sie die **Koordinatenbasis** von $T_p^{\text{alg}}M$.

Bemerkung. Die Definition des algebraischen Tangentialraums funktioniert in der komplexen und algebraischen Geometrie, allerdings in einer leicht modifizierten Form. Statt Derivationen auf der Algebra $C^\infty(M)$ der global definierten Funktionen zu betrachten, hätten wir auch sogenannte *Funktionskeime* betrachten können. Die Algebra $\mathcal{E}(p)$ der Funktionskeime bei $p \in M$ besteht aus Äquivalenzklasse $[f, U]$ von Paaren, wobei $U \subset M$ eine offene Umgebung von p ist und $f \in C^\infty(U)$. Per Definition gilt $[f, U] = [g, V]$ genau dann wenn es eine kleinere offene Umgebung $W \subset U \cap V$ von p gibt, so dass $f|_W = g|_W$. Offensichtlich hat jedes $f \in C^\infty(M)$ einen Keim $[f, M] \in \mathcal{E}(p)$. Umgekehrt zeigen die angedeuteten Fortsetzungsargumente für lokal definierte Funktionen, dass jeder Keim einen global definierten Repräsentanten besitzt. Dies ist in der komplexen Geometrie nicht wahr! Die vermeintlich korrekte Art und Weise, $T_p^{\text{alg}}M$ zu definieren, wäre daher der Vektorraum der Derivationen auf $\mathcal{E}(p)$. Dieser Zugang wird in [\[BJ82\]](#) verfolgt.

Zusammenfassung

Nachdem wir uns nun die Mühe gemacht haben, Tangentialräume und Differentiale nicht nur einmal, sondern dreimal zu konstruieren, überlegen wir uns wie die verschiedenen Konstruktionen zusammenhängen. Sei also M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Sobald wir eine Karte $\varphi \in \mathcal{S}_p^M$ wählen, erhalten wir folgendes Diagramm von linearen Isomorphismen:

$$\begin{array}{ccc}
 T_p^{\text{lok}} M & \xrightarrow{\quad \text{ev}_\varphi \quad} & \mathbb{R}^m \\
 \downarrow \kappa_\varphi \circ \text{ev}_\varphi & \cong & \downarrow \kappa_\varphi \\
 T_p^{\text{geo}} M & \xleftarrow{\quad \cong \quad} & \mathbb{R}^m \\
 \downarrow \partial^\varphi \circ \kappa_\varphi^{-1} & \cong & \downarrow \partial^\varphi \\
 T_p^{\text{alg}} M & \xleftarrow{\quad \cong \quad} & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Insbesondere sind alle drei Modelle von Tangentialräumen isomorph. Aber die Situation ist noch besser. Während jeder der einzelnen Kartenisomorphismen ev_φ , κ_φ und ∂^φ von der Wahl der Karte abhängt, gilt überraschenderweise:

Die Kompositionen ev_φ , $\kappa_\varphi \circ \text{ev}_\varphi$ und $\partial^\varphi \circ \kappa_\varphi^{-1}$ sind unabhängig von der Wahl von φ !

Der Nachweis ist eine gute Übung, sich mit den verschiedenen Definitionen vertraut zu machen. Die Konsequenz ist, dass die Tangentialräume $T_p^{\text{lok}} M$, $T_p^{\text{geo}} M$ und $T_p^{\text{alg}} M$ nicht nur isomorph, sondern **kanonisch isomorph** sind. Das heißt es gibt einen ausgezeichneten Isomorphismus, der unabhängig von irgendwelchen Wahlen abhängt. Und es wird noch besser. Für jede differenzierbare Abbildung $f: M \rightarrow N$ haben wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 T_p^{\text{lok}} M & \xrightarrow{d_p^{\text{lok}} f} & T_{f(p)}^{\text{lok}} N & & \\
 \downarrow \kappa_\varphi \circ \text{ev}_\varphi & & \downarrow \kappa_\psi & & \downarrow \text{ev}_\psi \\
 T_p^{\text{geo}} M & \xrightarrow{d_p^{\text{geo}} f} & T_{f(p)}^{\text{geo}} N & & \\
 \downarrow \partial^\varphi & & \downarrow \partial^\psi & & \\
 T_p^{\text{alg}} M & \xrightarrow{d_p^{\text{alg}} f} & T_{f(p)}^{\text{alg}} N & \xrightarrow{\quad \partial^\psi \quad} & \mathbb{R}^n \\
 \uparrow \text{ev}_\varphi & & \uparrow \text{ev}_\psi & & \uparrow \\
 \mathbb{R}^m & & \mathbb{R}^n & & \\
 & & \text{---} D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \text{---} & &
 \end{array}$$

Zum einen sagt dieses Diagramm, dass alle drei Differentiale sämtliche lokalen Ableitungen von f in jeweils einem Objekt bündeln. Zum anderen sagt es, dass die kanonischen Isomorphismen ev_φ , $\kappa_\varphi \circ \text{ev}_\varphi$ und $\partial^\varphi \circ \kappa_\varphi^{-1}$ die verschiedenen Differentiale ineinander übersetzen. Wir werden gleich sehen, dass jede der drei Konstruktionen von Tangentialräumen und Differentialen **funktoriiell** sind, das heißt, sie ordnen Mannigfaltigkeiten Vektorräumen und differenzierbaren Abbildungen linear Abbildungen zwischen den entsprechenden Vektorräumen, so dass Identitätsabbildungen und Kompositionen auf ebensolche abgebildet werden. Die Kompositionen ev_φ , $\kappa_\varphi \circ \text{ev}_\varphi$ und $\partial^\varphi \circ \kappa_\varphi^{-1}$ liefern in der Sprache der Kategorientheorie jeweils einen **natürlichen Isomorphismus** zwischen je zwei der drei Tangentialfunktoren.

Die Moral von all dem ist, dass wir die drei Konstruktionen guten Gewissens als drei Beschreibungen von ein und demselben Objekt beschreiben können. Wir schreiben also von nun an nur noch $T_p M$ und $d_p f$ und arbeiten je nach Situation in dem Modell, das uns am einfachsten zum Ziel bringt. Zum Abschluss noch ein kleines Wort der Warnung. Die

Notation für Differentiale ist nämlich in der Literatur alles andere als einheitlich. Neben unserer Notation $d_p f$ findet man auch oft folgende Schreibweisen:

$$T_p f \quad f_{*p} \quad df_p \quad (\text{Geometrie/Topologie})$$

$$D_p f \quad \partial f(p) \quad f'(p) \quad (\text{Analysis})$$

Die erste Zeile ist tendenziell eher in der Geometrie und Topologie anzutreffen, und die zweite eher in der Analysis auf Mannigfaltigkeiten. Diese Vielfalt an Notation hat leider zur Folge, dass es hier nicht reicht, Notation wieder zu erkennen. Stattdessen muss man das Konzept wieder erkennen können!

5.2 Eigenschaften des Differentials

Nach den langwierigen Konstruktionen wenden wir uns einigen Eigenschaften der Differentiale und Tangentialräume zu.

Satz 5.13. (i) Für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit M und für alle $p \in M$ gilt

$$d_p \text{id}_M = \text{id}_{T_p M}.$$

(ii) Seien $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow P$ differenzierbar. Dann gilt für alle $p \in M$

$$d_p(g \circ f) = d_{f(p)}g \circ d_p f.$$

(iii) Sei $f: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus. Dann ist $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)}N$ für alle $p \in M$ ein Isomorphismus.

(iv) Sei $f: M \rightarrow N$ konstant. Dann gilt $d_p f = 0$ für alle $p \in M$.

Beweis. Wir führen die Beweise im geometrischen Modell. Sei $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve, $p = \gamma(0)$ und $v = [\gamma]_p \in T_p M$.

(i) Es gilt $d_p \text{id}_M(v) = [\text{id}_M \circ \gamma]_p = [\gamma]_p = v$.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} d_p(g \circ f)(v) &= [(g \circ f) \circ \gamma]_{g \circ f(p)} = [g \circ (f \circ \gamma)]_{g(f(p))} \\ &= d_{f(p)}g([f \circ \gamma]_p) = d_{f(p)}g \circ d_p f([\gamma]_p) = d_{f(p)}g \circ d_p f(v). \end{aligned}$$

(iii) Folgt aus (i) und (ii) angewendet auf $f \circ f^{-1} = \text{id}_M$.

(iv) $d_p f(v) = [f \circ \gamma]_p = 0$, da $f \circ \gamma$ eine konstante Kurve ist und somit den Nullvektor darstellt.

□

Alle dieser Aussagen lassen sich mit ähnlich geringem Aufwand in den anderen Modellen beweisen.

Einige abstrakte Beispiele

- (1) Sei $U \subset M$ eine offene Teilmenge einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und $\iota: U \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Dann ist $d_p\iota: T_pU \rightarrow T_pM$ für jedes $p \in U$ ein Isomorphismus. Tatsächlich ist einerseits jede Kurve in U via ι eine Kurve in M und andererseits liefert jede Kurve in M durch Einschränkung des Definitionsintervalls in eine Kurve in U . Da die Einschränkung die Tangentialklasse der Kurve nicht ändert, sind beide Konstruktionen auf den Äquivalenzklassen invers.
- (2) Sei $S \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit und $\iota: S \rightarrow M$ die Inklusion. Nach [Korollar 3.6](#) ist ι eine differenzierbare Einbettung, also insbesondere eine Immersion. Dies bedeutet allerdings nichts anderes, als dass $d_p\iota: T_pU \rightarrow T_pM$ für alle $p \in S$ injektiv ist. Insbesondere gilt $T_pS \cong d_p\iota(T_pS) \subset T_pM$.
- (3) Sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum, versehen mit der linearen differenzierbaren Struktur. Die Vektorraumstruktur liefert dann für jedes $p \in V$ einen kanonischen Isomorphismus

$$\lambda_p: V \longrightarrow T_pV.$$

Die Multiplikation liefert zunächst die Abbildung

$$\lambda_0: V \rightarrow T_0V, \quad \lambda_0(v) = [t \mapsto tv]_0,$$

die jedem Vektor die entsprechende parametrisierte Gerade zuordnet. Für jede lineare Karte $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ stimmt die Komposition $\lambda_0 \circ \varphi^{-1}$ mit dem Isomorphismus κ_φ überein. Folglich ist λ_0 selbst ein Isomorphismus. Schließlich liefert die Addition für festes $p \in M$ die Translationsabbildung $\tau_p: V \rightarrow V$ mit $\tau_p(q) = p+q$. Offenbar sind τ_p und τ_{-p} invers und beide differenzierbar. Nach [Satz 5.13](#) ist das Differential

$$d_0\tau_p: T_0V \longrightarrow T_pV$$

für jedes $p \in M$ ein Isomorphismus. Die Komposition $\lambda_p = d_0\tau_p \circ \lambda_0: V \rightarrow T_pV$ ist der gesuchte kanonische Isomorphismus.

Achtung! Die drei beschriebenen Isomorphismen

$$T_pU \cong T_pM, \quad T_pS \cong d_p\iota(T_pS) \quad \text{und} \quad T_pV \cong V$$

werden überall und ständig benutzt, ohne dabei explizit genannt zu werden. In der Regel findet man Aussagen wie $T_pU = T_pM$, $T_pS \subset T_pM$ und $T_pV = V$, die streng genommen falsch sind. Es herrscht allerdings die Stille Übereinkunft, dass an diesen Stellen stets die beschriebenen Isomorphismen benutzt werden.

- (4) Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Karte, und $p \in U$. Dann sind U und U' als offene Teilmengen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten selbst differenzierbare Mannigfaltigkeiten und wir können φ nachträglich(!) als Diffeomorphismus auffassen. Wir erhalten dann ein Diagramm von Isomorphismen

$$\begin{array}{ccccc} T_pU & \xrightarrow[\text{5.13}]{d_p\varphi} & T_{\varphi(p)}U' & \xrightarrow[\text{(1)}]{\cong} & T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m \\ \cong \downarrow \text{(1)} & & & & \text{(3)} \uparrow \cong \\ T_pM & \xrightarrow[\text{ev}_\varphi, \kappa_\varphi^{-1}, (\partial^\varphi)^{-1}]{\cong} & & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

und durch ausschreiben der Definitionen lassen sich die Kartenisomorphismen ev_φ , κ_φ^{-1} und $(\partial^\varphi)^{-1}$ nachträglich über eine Reihe von kanonischen Isomorphismen mit dem Differential $d_p\varphi$ identifizieren.

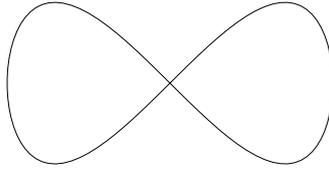


Abbildung 1: Das Bild von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (2 \cos(t), \sin(2t))$.

- (5) Sei schließlich $S \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und $\iota: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Inklusion. Über die Isomorphismen aus (1) und (3) können wir $T_p S$ dann als Unterraum von \mathbb{R}^n auffassen. Dieser Unterraum enthält alle Richtungsvektoren von Kurven in \mathbb{R}^n , die innerhalb von S verlaufen und erfasst somit das eingangs beschriebene Intuition von Tangentialräumen.

5.3 Kritische Punkte und reguläre Werte

Wir wenden uns nun der folgenden Frage zu: *Wie gut funktioniert „Urbild nehmen“ in der Differentialtopologie?* Aus der linearen Algebra ist man gewohnt, dass Bilder und Urbilder von linearen Abbildungen wieder Vektorräume sind. Bei differenzierbaren Abbildungen sieht die Sache etwas anders aus. Wie in [Abbildung 1](#) zu sehen, ist das Bild einer differenzierbaren Abbildung nicht immer eine Mannigfaltigkeit. Für Urbilder gilt das gleiche, wie man an der Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy$ sehen kann. Das Urbild $f^{-1}(0)$ ist das Koordinatenkreuz, das in der Nähe des Ursprungs keine Mannigfaltigkeit ist. Für $q \neq 0$ ist $f^{-1}(q)$ allerdings eine Hyperbel, die tatsächlich eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 darstellt. In diesem Beispiel sind also „die meisten“ Urbilder wieder Mannigfaltigkeiten. Dieses Phänomen lässt sich allgemeiner verstehen.

Definition 5.14. Sei $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung.

- (a) Ein Punkt $p \in M$ heißt **regulärer Punkt** von f falls $d_p f: T_p M \rightarrow T_p N$ surjektiv ist. Andernfalls heißt p ein **kritischer Punkt**. Die Menge aller kritischen Punkte bezeichnen wir mit $\text{Crit}(f)$.
- (b) Ein Punkt $q \in N$ heißt **regulärer Wert** von f falls

$$f^{-1}(q) \cap \text{Crit}(f) = \emptyset. \quad (13)$$

Andernfalls heißt q **kritischer Wert**.

Bemerkung. Die Definition von regulären Werte enthält eine kleine Subtilität, die man leicht übersieht. Gilt nämlich $f^{-1}(q) = \emptyset$, so ist die Bedingung (13) automatisch erfüllt. Das bedeutet, dass „Werte“, die von f überhaupt nicht angenommen werden, immer reguläre Werte sind. Auf den ersten Blick mag dies etwas sinnfrei wirken, aber wir werden bald eine überraschend interessante Anwendung sehen.

2.12.2019

Beispiel. (1) Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist jedes lokale Minimum oder Maximum⁵ ein kritischer Punkt von f . Ist nämlich $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ eine Kurve mit $\gamma(p) = 0$, so hat die Funktion $f \circ \gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ ein lokales Minimum/Maximum bei 0. Bekanntermaßen gilt somit $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ und die geometrische Interpretation des Differentials liefert

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = d_p f(v_\gamma),$$

wobei $v_\gamma = [\gamma]_p = \dot{\gamma}(0)$. Da γ beliebig war, gilt $d_p f = 0$.

⁵Globales Maximum/Minimum: es gibt eine Umgebung U von p , so dass $f(q) \leq f(p)$ bzw. $f(q) \geq f(p)$ für alle $q \in U$.

- (2) Sei M kompakt. Dann besitzt jede differenzierbare Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ als stetige Funktion globale Minima und Maxima. Falls M mehr als einen Punkt enthält, gibt es also immer mindestens zwei kritische Punkte.
- (3) Als Beispiel betrachten wir die Funktion $h: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x, y, z) = z$, die wir uns als Höhenfunktion vorstellen. Als Einschränkung der differenzierbaren Funktion $\tilde{h}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{h}(x, y, z) = z$, ist h differenzierbar (siehe [Lemma 3.10](#)). Offensichtlich ist die Ableitung von \tilde{h} überall von Null verschieden, so dass \tilde{h} keine kritischen Punkte hat. Nach (2) muss h allerdings mindestens zwei haben. Aus der Definition von S^n ist klar, dass h eindeutige globale Maxima und Maxima bei $N = (0, 0, 1)$ und $S = (0, 0, -1)$ hat. Dies sind in diesem Fall auch die einzigen kritischen Punkte. Um dies zu sehen, betrachten wir die Karte

$$\varphi: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, y, z) = \frac{1}{1-z}(x, y)$$

und stellen fest, dass $S^2 \setminus \{N, S\}$ diffeomorph⁶ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ abgebildet wird. Somit deckt diese Karte das ganze Gebiet, an dem wir interessiert sind, komplett ab. Die Umkehrabbildung der Karte ist gegeben durch

$$\varphi^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right),$$

die entsprechende lokale Darstellung von h sowie deren Ableitung als

$$h \circ \varphi^{-1}(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \quad \text{und} \quad D(h \circ \varphi^{-1})(x, y) = \frac{4}{x^2 + y^2 + 1}(x, y).$$

Letztere ist aber für $(x, y) \neq 0$ niemals Null. Folglich ist $d_p h$ für alle $p \in S^2 \setminus \{N, S\}$ surjektiv und wir schließen $\text{Crit}(h) = \{N, S\}$.

25.11.2019

Satz 5.15 (Satz vom regulären Wert). *Sei $f: M \rightarrow N$ differenzierbar und $q \in N$ ein regulärer Wert. Dann ist $f^{-1}(q) \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit und es gilt*

$$T_p f^{-1}(q) = \ker(d_p f) \subset T_p M.$$

Insbesondere gilt $\dim f^{-1}(1) = \dim M - \dim N$.

Beweis. Sei $p \in f^{-1}(q)$ und wie üblich $m = \dim M$ und $n = \dim N$. Da p per Annahme ein regulärer Punkt ist, hat das Differential $d_p f$ Rang n , was der maximal mögliche Wert ist. Aus der lokalen Interpretation des Differentials ist auch klar, dass $\text{rk}(d_p f) = \text{rk}(f, p)$ gilt. [Lemma 3.13](#) garantiert eine offene Umgebung von p in M , in der f überall Rang mindestens, und somit gleich n hat. In dieser Umgebung liefert der Rangsatz [3.14](#) Karten $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ von M und $\psi: V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^n$ von N , so dass

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n). \tag{14}$$

Des weiteren können wir $\varphi(0) = 0$, $\psi(q) = 0$ und $f(U) \subset V$ annehmen.

Wir behaupten, dass die Karte φ zu $f^{-1}(q)$ [adaptiert](#) ist. Zunächst halten wir fest, dass

$$f^{-1}(q) \cap U = (\psi \circ f)^{-1}(0) \cap U$$

gilt. Ähnlich erhalten wir

$$\varphi(f^{-1}(q) \cap U) = \varphi((\psi \circ f)^{-1}(0) \cap U) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(0).$$

⁶Zur Erinnerung: differenzierbare Karte sind a priori nur Homöomorphismen, aber a posteriori Diffeomorphismen.

Aus der Normalform (14) erhalten wir

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(0) = U \cap (\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}) \subset \mathbb{R}^m,$$

was zu zeigen war. Daraus können wir auch direkt ablesen, dass

$$\dim f^{-1}(q) = m - n$$

gilt, und somit insbesondere auch $\dim T_p f^{-1}(q) = m - n$. Aus der linearen Algebra wissen wir andererseits, dass

$$\operatorname{rk}(d_p f) + \dim \ker(d_p f) = \dim T_p M = m$$

und die Annahme $\operatorname{rk}(d_p f) = n$ liefert $\dim \ker(d_p f) = m - n$.

Um die gewünschte Identifikation des Tangentialraums $\dim T_p f^{-1}(q)$ zu erhalten, genügt es also die Inklusion

$$\dim T_p f^{-1}(q) \subset \ker(d_p f)$$

zu zeigen. Sei dazu $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow f^{-1}(q)$ eine differenzierbare Kurve in $f^{-1}(q)$ mit $\gamma(0) = p$ und $v = [\gamma]_p \in T_p M$. Per Definition gilt $f \circ \gamma(t) = q$ für all $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Da diese konstante Kurve den Nullvektor in $T_q N$ darstellt, gilt wie behauptet

$$d_p f(v) = [f \circ \gamma]_q = 0. \quad \square$$

Das Satz vom regulären Wert ist eins der nützlichsten Werkzeuge, um differenzierbare Mannigfaltigkeiten zu konstruieren, oder gegebene Räume als solche zu beschreiben. Die zugehörige Identifizierung der Tangentialräume ist auch oft praktisch. Meistens wendet man den Satz in folgender Form an:

Beispiel. Seien V, W endlich dimensionale reelle Vektorräume und $F: V \rightarrow W$ differenzierbar, zum Beispiel $V = \mathbb{R}^m$ und $W = \mathbb{R}^n$. Die kanonischen Isomorphismen $V \cong T_p V$ und $W \cong T_q W$ machen folgendes Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccc} T_p V & \xrightarrow{d_p F} & T_{F(p)} W \\ \lambda_p \uparrow \cong & & \cong \uparrow \lambda_{F(p)} \\ V & \xrightarrow{DF(p)} & W. \end{array}$$

Die Surjektivität und der Kern des Differentials $d_p F$ lassen sich also mit Hilfe der gewöhnlichen Ableitung $DF(p)$ untersuchen.

Beispiel. (1) Kommen wir zum anfangs erwähnten Beispiel $f(x, y) = xy$ zurück. Um die Menge der regulären Werte zu bestimmen, suchen wir zunächst die kritischen Punkte von f . Da jede lineare Abbildung in einen eindimensionalen Vektorraum entweder surjektiv und Null ist, gilt

$$\operatorname{Crit}(f) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d_p f = 0\} = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid Df(p) = 0\},$$

wobei die zweite Gleichheit die Identifikation aus dem obigen Beispiel benutzt. Nun gilt offenbar $Df(x, y) = (y, x)$, woraus wir sofort ablesen, dass $\operatorname{Crit}(f) = \{0\}$. Da weiterhin $f(0) = 0$ gilt, ist $q = 0 \in \mathbb{R}$ der einzige kritische Wert. Für alle $q \neq 0$ ist dann $f^{-1}(q)$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 .

(2) Als nächstes betrachten wir die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Mit der Abbildung $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(p) = |p|^2$, gilt dann $F^{-1}(1) = S^n$ und wir wollen zeigen, dass 1 ein regulärer Wert von F ist. Dazu berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned} DF(p)v &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(p + tv) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle p + tv, p + tv \rangle \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (|p|^2 + 2t \langle p, v \rangle + t^2 |v|^2) \\ &= 2 \langle p, v \rangle. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $DF(0) = 0$ und für $p \neq 0$ liefert $v = p$ die Ergebnis $DF(p)p = 2|p|^2 \neq 0$. Wir schließen daraus $\text{Crit}(F) = \{0\}$ und somit ist $F(0) = 0$ der einzige kritische Wert von F . Insbesondere ist $F^{-1}(1) = S^n$ eine Untermannigfaltigkeit, was zwar nichts Neues ist, allerdings können wir nun auch den Tangentialraum beschreiben. Das Ergebnis ist wie erwartet:

$$T_p S^n \cong \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, v \rangle = 0\}.$$

2.12.2019

- (3) Seien M_n der Vektorraum der reellen $(n \times n)$ -Matrizen, S_n der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen und

$$O(n) = \{A \in M_n \mid A^t A = \mathbf{1}\}$$

die multiplikative Untergruppe der orthogonalen Matrizen, genannt *orthogonale Gruppe*. Um zu zeigen, dass $O(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von M_n ist, betrachten wir die Abbildung

$$F: M_n \longrightarrow S_n, \quad F(A) = A^t A.$$

Offensichtlich gilt $O(n) = F^{-1}(\mathbf{1})$ und wir wollen zeigen, dass die Einheitsmatrix $\mathbf{1} \in S_n$ ein regulärer Wert ist. Der Grund, warum S_n statt M_n als Wertebereich auftaucht, wird später klar werden. Da F zwischen Vektorräumen abbildet, können wir das Differential $d_A F$ kanonisch mit der gewöhnlichen Ableitung $DF(A)$ identifizieren. Diese berechnen wir für $A \in M_n$ und $B \in M_n (\cong T_A M_n)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} DF(A)B &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(A + tB) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (A^t A + t(A^t B + B^t A) + t^2 B^t B) \\ &= A^t B + B^t A. \end{aligned}$$

Nun sei $F(A) = \mathbf{1}$ und $S \in S_n$ beliebig vorgegeben. Um zu zeigen, dass $DF(A)$ surjektiv ist, müssen wir die Gleichung $DF(A)B = S$ für $B \in M_n$ lösen. Eine Lösung ist gegeben durch $B = \frac{1}{2}AS$, wie man leicht nachrechnet.

An dieser Stelle sieht man auch, warum M_n als Wertebereich nicht funktionieren würde. Die Ableitung $DF(A)B = A^t B + B^t A$ nimmt nämlich nur Werte in den symmetrischen Matrizen an. Folglich wäre die Gleichung $DF(A)B = C$ für $B \in M_n \setminus S_n$ nicht lösbar.

Nach dem Satz vom regulären Wert ist $O(n)$ also eine Untermannigfaltigkeit von M_n der Dimension

$$\dim O(n) = \dim M_n - \dim S_n = n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Wir halten auch fest, dass der Tangentialraum an die Einheitsmatrix gegeben ist als

$$T_{\mathbf{1}} O(n) \cong \ker DF(\mathbf{1}) = \{B \in M_n \mid B^t + B = 0\} := \mathfrak{o}(n).$$

Damit hat es folgendes auf sich. Eine Gruppe, die gleichzeitig eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, so dass die Gruppenoperation und die Inversion differenzierbare Abbildungen sind, nennt man *Lie Gruppe*. Dies ist für $O(n)$ der Fall, da Matrixmultiplikation und Transposition auf ganz M_n differenzierbar sind, und die Inversion für $A \in O(n)$ per Definition $A^{-1} = A^t$ gilt. Der Tangentialraum an das neutrale Element heißt die *Lie Algebra* der jeweiligen Lie Gruppe. Die Lie Algebra $\mathfrak{o}(n)$ von $O(n)$ ist also als Vektorraum der antisymmetrischen Matrizen gegeben. Allerdings ist es damit nicht getan. Die Lie Algebra hat eine feiner algebraische Struktur, die erstaunlich viel Aufschluss über die Lie Gruppe gibt. Diese zu untersuchen würde uns allerdings zu weit weg vom Thema führen.

6 Der Satz von Sard und seine Anwendungen

Wir kommen zurück auf die Frage, wie gut Urbilder nehmen in der Differentialtopologie funktioniert. Zunächst die schlechte Nachricht: ohne Einschränkungen ist die Situation so schlecht, wie sie nur sein könnte. Jede differenzierbare Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist insbesondere stetig. Da einzelne Punkte in Mannigfaltigkeiten abgeschlossen sind, ist $f^{-1}(q)$ für jedes $q \in N$ a priori zumindest abgeschlossen. Abgeschlossene Teilmengen von Mannigfaltigkeiten können aber immer noch sehr garstig sein. Instinktiv würde man eventuell erwarten, dass die Differenzierbarkeit etwas mehr liefert als Stetigkeit. Das ist leider nicht der Fall.

Lemma 6.1. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $A \subset M$ abgeschlossen. Dann gibt es eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ mit $A = f^{-1}(0)$.*

Beweis (Skizze): Man betrachtet zunächst den Spezialfall $M = U' \subset \mathbb{R}^m$ einer offenen Teilmenge in \mathbb{R}^m . Man wählt eine abzählbare Überdeckung $\{B_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ von $U' \setminus A$ durch offene Bälle B_ν und Funktionen $\psi_\nu: U' \rightarrow \mathbb{R}$ mit

(a) $\psi_\nu \geq 0$ und $\psi_\nu(x) > 0$ genau dann, wenn $x \in B_\nu$, und

(b) $\left| \frac{\partial^k \psi_\nu}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) \right| < 2^{-\nu}$ für alle $x \in U'$ und $k \leq \nu$.

Die Eigenschaft (b) garantiert, dass die Reihe $\psi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(x)$ sowie alle Ableitungen lokal gleichmäßig in x konvergieren, und somit eine unendlich oft differenzierbare Funktion $\psi: U' \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Eigenschaft (a) liefert schließlich $\psi^{-1}(0) = A$.

Für allgemeines M führt man das Problem durch Wahl eines Atlas und einer subordinierten Zerlegung der Eins auf den Spezialfall zurück. Mehr Details findet man bei [BJ82, (14.1)] und [Lee13, Theorem 2.29]. \square

Dieser Satz zeigt, dass man nicht ohne weiteres auf Regularitätsbedingungen wie im Satz vom regulären Wert verzichten kann, wenn man ungestraft Urbilder nehmen will. Die gute Nachricht ist allerdings, dass in der Differentialtopologie „fast alles“ regulär ist. Dies ist der Inhalt des Satzes von Sard.

6.1 Der Satz von Sard

Der Begriff „fast alle“ ist aus der Lebesgue'schen Maß- und Integrationstheorie importiert. Wir erinnern uns:

- Eine Teilmenge $Z \subset \mathbb{R}^m$ heißt **(Lebesgue) Nullmenge** wenn es für beliebiges $\epsilon > 0$ abzählbar viele Quader $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, so dass $Z \subset \bigcup_n Q_n$ und $\sum_n \text{vol}(Q_n) < \epsilon$.
- Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen.
- Diffeomorphismen bilden Nullmengen auf Nullmengen ab.

Da unsere Mannigfaltigkeiten abzählbare differenzierbare Atlanten besitzen, ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition 6.2. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $Z \subset M$ heißt **Nullmenge** falls für jede differenzierbare Karte $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ von M das Kartenbild $\varphi(T \cap U) \subset \mathbb{R}^m$ eine Lebesgue Nullmenge ist. In dem Fall sagen wir auch, dass $M \setminus Z$ **fast alle** Punkte von M enthält.

Bemerkung. Um von der Maßtheorie zurück zur Topologie zukommen, überlegen wir uns kurz, dass Komplemente von Nullmengen dicht sind. Sei dazu $Z \subset M$ eine Nullmenge und $p \in M$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass jede offene Umgebung $V \subset M$ von p einen Punkt aus $M \setminus Z$ enthält. Sei $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Karte mit $p \in U$. Dann ist $\varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m$ nicht leer und offen, und hat somit positives Lebesgue Maß. Allerdings hat $\varphi(Z \cap U \cap V)$ als Teilmenge der Nullmenge $\varphi(Z \cap U)$ Maß Null. Folglich hat $\varphi((U \cap V) \setminus Z)$ positives Maß und ist damit nicht leer. Insbesondere ist $V \setminus Z$ nicht leer, was zu zeigen war.

Satz 6.3 (Satz von Sard). *Sei $f: M \rightarrow N$ differenzierbar und $C = \text{Crit}(f) \subset M$. Dann ist $f(C) \subset N$ eine Nullmenge. Insbesondere ist die Menge $N \setminus f(C)$ der regulären Werte von f nicht leer und dicht in N wann immer $N \neq \emptyset$.*

Der Beweis ist etwas länglich und benutzt im Prinzip nur Standardmethoden aus der Maßtheorie, die für diese Vorlesung nicht weiter relevant sind. Wir belassen es daher bei einer schemenhaften Skizze. Detaillierte Beweise findet man zum Beispiel in [BJ82, Ch. 6], [Lee13, Ch. 6] und [Mil65, Ch. 3].

Beweis (Skizze): Zunächst reduziert die Wahl von Atlanten das Problem sofort auf den Spezialfall einer differenzierbaren Abbildung $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Man betrachtet die Mengen

$$C_k = \left\{ p \in U \mid \frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_j}}(p) = 0 \forall j \leq k \right\}.$$

Diese bilden eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen $C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$. Der Beweis hat von hier an drei Schritte:

- (1) $f(C \setminus C_1)$ ist eine Nullmenge.
- (2) $f(C_i \setminus C_{i+1})$ ist für alle i eine Nullmenge.
- (3) $f(C_k)$ ist für hinreichend großes k eine Nullmenge.

Die ersten beiden Schritte beweist man über Induktion nach m . Das wesentliche Werkzeug ist dabei der Satz von Fubini, der besagt, dass $Z \subset \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge ist falls $Z_t = \{y \in \mathbb{R}^{m-1} \mid (t, y) \in Z\}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ eine Nullmenge in \mathbb{R}^{m-1} ist. Im letzten Schritt werden von Hand geeignete Überdeckungen durch Würfel konstruiert. \square

Bemerkung. (i) Der Satz von Sard garantiert zwar die Existenz regulärer Werte, ist aber in dieser Hinsicht nicht konstruktiv. Wenn man einen konkreten regulären Wert braucht, muss man sich also selbst auf die Suche machen.

(ii) Der Satz von Sard und der Satz vom regulären Wert sind im Zusammenspiel besonders nützlich. Viele Existenzsätze in der Differentialtopologie lassen sich nach folgendem Prinzip beweisen. Zunächst formuliert man das gegebene Existenzproblem auf die Existenz regulärer Werte einer geeigneten Abbildung zurück. Der Satz von Sard erledigt dann den Rest. Wir werden dieses Prinzip beim Beweis des noch ausstehenden Einbettungssatz für nicht kompakte Mannigfaltigkeiten in Aktion sehen.

(iii) Der Satz von Sard gilt nicht nur für C^∞ Abbildungen, sondern für C^k Abbildungen $f: M \rightarrow N$ sofern $k > \max\{0, \dim M - \dim N\}$. Diese Grenze ist allerdings scharf, wie ein Beispiel in Sard's Artikel [Sar42, Ch. 8] zeigt.

Anwendung: Die ersten Homotopiegruppen von Sphären

In [Abschnitt 4.3](#) hatten wir die Homotopiegruppen $\pi_m(S^n) = [S^m, S^n]_0$ von Sphären eingeführt. Der Satz von Sard erlaubt es, diese Gruppen für $m < n$ zu verstehen.

Satz 6.4. *Sei $f: S^m \rightarrow S^n$ stetig, $m < n$ und $p_0 \in S^m$ ein beliebiger Basispunkt. Dann ist f punktiert homotop zu der konstanten Abbildung $p \mapsto f(p_0)$. Insbesondere gilt*

$$\pi_m(S^n) = [S^m, S^n]_0 = 0 \quad \text{für } m < n.$$

Beweis. Nach [Satz 4.1](#), beziehungsweise der in [Abschnitt 4.3](#) angedeuteten punktierten Version, können wir ohne Beschränkung annehmen, dass f differenzierbar ist. Der Satz von Sard garantiert dann die Existenz eines regulären Wertes $q \in S^n$. Nun kann allerdings das Differential $d_p f: T_p S^m \rightarrow T_{f(p)}$ für kein $p \in S^m$ surjektiv sein, da nach Voraussetzung $m < n$

gilt. Folglich muss $q \in S^n \setminus f(S^m)$ gelten, was nichts anderes bedeutet, als dass f selbst nicht surjektiv ist. Wir schreiben f (etwas pedantisch) als Komposition

$$S^m \xrightarrow{\bar{f}} S^n \setminus \{q\} \xrightarrow{\iota} S^n,$$

wobei ι die Inklusion ist und \bar{f} die eindeutig bestimmte Abbildung mit $f = \iota \circ \bar{f}$. Der Satz folgt nun aus zwei einfachen Lemmata:

Lemma 6.5. *Sei $q \in S^n$ beliebig. Dann ist $S^n \setminus \{q\}$ diffeomorph zu \mathbb{R}^n .*

Beweis. Sei $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ der Nordpol. Wir wissen bereits, dass $S^n \setminus \{N\}$ als Kartengebiet diffeomorph zu \mathbb{R}^n ist. Es genügt also einen Diffeomorphismus $D_q: S^n \rightarrow S^n$ mit $D_q(q) = N$ zu finden. Nun ist es eine leichte Aufgabe in linearer Algebra, eine orthogonale Abbildung von \mathbb{R}^{n+1} zu konstruieren, die q auf N abbildet. Die Einschränkung auf S^n liefert das Gewünschte. \square

Lemma 6.6. *Sei $g: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar und $p_0 \in M$. Dann ist g differenzierbar punktiert homotop zu der konstanten Abbildung $p \mapsto g(p_0)$.*

Beweis. Sei $\tau: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine differenzierbare Funktion mit $\tau(t) = 1$ für $t \leq \epsilon$ und $\tau(t) = 0$ für $t \geq 1 - \epsilon$ wobei $0 < \epsilon < 1/2$. Dann ist durch die Formel

$$H: M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad H(p, t) = \tau(t)g(p) + (1 - \tau(t))g(p_0)$$

eine differenzierbare Homotopie gegeben und es gilt

$$H(p, 0) = g(p), \quad H(p, 1) = g(p_0) \quad \text{und} \quad H(p_0, t) = g(p_0)$$

für alle $(p, t) \in M \times \mathbb{R}$. \square

Um den Beweis von [Satz 6.4](#) zu beenden wählen wir

- einen Diffeomorphismus $\varphi: S^n \setminus \{q\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie in [Lemma 6.5](#) und
- eine Homotopie $H: S^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ von $\varphi \circ \bar{f}$ zu der konstanten Abbildung $p \mapsto \varphi(f(p_0))$ wie in [Lemma 6.6](#).

Dann ist durch

$$\tilde{H}: S^m \times \mathbb{R} \rightarrow S^n, \quad \tilde{H}(p, t) = \iota \circ \varphi^{-1} \circ H(p, t) = \varphi^{-1}(H(p, t))$$

eine punktierte, differenzierbare Homotopie gegeben mit

$$\begin{aligned} \tilde{H}(p, 0) &= \iota \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \bar{f}(p) = f(p) \\ \tilde{H}(p, 1) &= \iota \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \bar{f}(p_0) = f(p_0) \end{aligned}$$

und [Satz 6.4](#) ist bewiesen. \square

6.2 Exkurs: Das Tangentialbündel als Mannigfaltigkeit

9.12.2019

Für die nächste Anwendung des Satz von Sard müssen wir uns etwas Gedanken darüber machen, wie die verschiedenen Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit zusammenhängen. Einerseits ist anschaulich klar, dass die Tangentialräume nahe beieinanderliegender Punkte irgendwie miteinander verbunden sind. Die Tangentialräume der Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, gedacht als Unterräume von \mathbb{R}^3 , variieren offensichtlich kontinuierlich mit ihrem Basispunkt. Andererseits sind für eine beliebige Mannigfaltigkeit M die Tangentialräume $T_p M$ und $T_q M$ für $p \neq q$ völlig unabhängig voneinander beschreibbar. Schließlich garantiert die Hausdorff

Eigenschaft disjunkte Umgebungen U von p und V von q , und wir wissen, dass die Inklusionen Isomorphismen $T_p U \cong T_p M$ und $T_q V \cong T_q M$ liefern. Wir müssen uns also überlegen, wie wir das „kontinuierliche Variieren“ der Tangentialräume im Beispiel von S^2 in unseren abstrakten Modellen von Mannigfaltigkeiten und Tangentialräumen formal erfassen können. Was wir dafür brauchen ist eine geeignete Topologie auf der Gesamtheit aller Tangentialräume. Zunächst etwas Terminologie:

Definition 6.7. (a) Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Das **Tangentialbündel** von M ist definiert als die Menge

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M$$

zusammen mit der Projektion

$$\pi_M: TM \longrightarrow M, \quad T_p M \ni v \mapsto \pi_M(v) = p.$$

Für $p \in M$ nennt man $\pi_M^{-1}(p) = T_p M$ die **Faser** von (TM, π_M) über p . Für eine beliebige Teilmenge $A \subset M$ definieren wir

$$TM|_A = \pi_M^{-1}(A) = \coprod_{a \in A} T_a M.$$

(b) Sei $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Das **(globale) Differential** von f ist die Abbildung

$$df: TM \longrightarrow TN, \quad T_p M \ni v \mapsto df(v) = d_p f(v) \in T_{f(p)} N.$$

Die Eigenschaften der punktweisen Differentiale aus [Satz 5.13](#) nehmen folgende globale Form an. Der zweite Punkt ist wahrscheinlich die eleganteste Art und Weise, die Kettenregel zu beschreiben.

Lemma 6.8. (i) Für jedes M gilt $d(\text{id}_M) = \text{id}_{TM}$.

(ii) Für eine Komposition $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ gilt $d(g \circ f) = dg \circ df$.

(iii) Falls $f: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus ist, ist df bijektiv mit $(df)^{-1} = d(f^{-1})$.

Aus den Definitionen ist ersichtlich, dass für jede differenzierbare Abbildung das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{df} & TN \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

kommutiert. Vom theoretischen Standpunkt aus, sollte jede sinnvolle Topologie auf TM und TN alle Abbildungen in diesem Diagramm stetig machen. Bloße Stetigkeit zu fordern, wäre allerdings etwas unnatürlich, da wir schließlich mit Differenzierbaren Objekten starten. Wir versuchen also direkt, TM und TN zu differenzierbaren Mannigfaltigkeiten zu machen.

Wir machen uns zunächst einige Gedanken über den Spezialfall $M = \mathbb{R}^m$. Wie wir in [Abschnitt 5.2](#), Beispiel (3) gesehen haben, liefert die Vektorraumstruktur von \mathbb{R}^m kanonische Isomorphismen $\lambda_p: \mathbb{R}^m \rightarrow T_p \mathbb{R}^m$. Sei $\tau_p: T_p \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ der inverse Isomorphismus und

$$\tau: T\mathbb{R}^m \xrightarrow{1:1} \mathbb{R}^{2m}, \quad T_p \mathbb{R}^m \ni v \mapsto \tau(v) = (p, \tau_p(v)).$$

Wir nennen τ die **kanonische Trivialisierung** von $T\mathbb{R}^m$. Man überzeugt sich leicht, dass τ eine Bijektion ist und für jede offene Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^m$ das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{R}^m|_{U'} & \xrightarrow{\tau} & U' \times \mathbb{R}^m \\ \pi_{\mathbb{R}^m} \downarrow & & \downarrow \text{pr}_{U'} \\ U' & \xrightarrow{=} & U'. \end{array}$$

Nun sei M eine beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Karte von M . Wir definieren eine Abbildung

$$\Phi: \pi_M^{-1}(U) \rightarrow U' \times \mathbb{R}^m$$

als Komposition

$$\begin{array}{ccc} \pi_M^{-1}(U) = TM|_U & \xrightarrow{d\varphi} & T\mathbb{R}^m|_{U'} \xrightarrow{\tau} U' \times \mathbb{R}^m. \\ & \searrow \Phi & \nearrow \\ & & \end{array}$$

Da φ ein Diffeomorphismus ist, ist $d\varphi$ bijektiv, was sofort aus [Lemma 6.8](#) folgt. Folglich ist Φ bijektiv und wir haben erhalten außerdem ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_M^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U' \times \mathbb{R}^m \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \text{pr}_{U'} \\ U & \xrightarrow{\varphi} & U'. \end{array} \quad (15)$$

Die Abbildungen der Form Φ sind natürliche Kandidaten für Karten von TM . Sei nämlich $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}' \subset \mathbb{R}^m$ eine weitere differenzierbare Karte und $\tilde{\Phi}: \pi_M^{-1}(\tilde{U}) \rightarrow \tilde{U}' \times \mathbb{R}^m$ die entsprechende Abbildung, so ist die Komposition

$$\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}: \varphi(U \cap \tilde{U}) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U}) \times \mathbb{R}^m$$

gegeben durch den offensichtlich differenzierbaren Ausdruck

$$\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}(x, v) = (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}(x), D(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(x)v).$$

Satz 6.9. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

- (i) *Es gibt eine eindeutige Topologie auf TM , so dass für jede differenzierbare Karte $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ von M die entsprechende Abbildung $\Phi: \pi_M^{-1}(U) \rightarrow U' \times \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus ist. Diese Topologie ist Hausdorffsch mit abzählbarer Basis.*
- (ii) *Die Abbildungen der Form Φ bilden einen differenzierbaren Atlas von TM und legen somit eine differenzierbare Struktur auf TM fest. Bezüglich dieser ist die Projektion $\pi_M: TM \rightarrow M$ differenzierbar und für jede differenzierbare Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist das Differential $df: TM \rightarrow TN$ differenzierbar.*

Beweis. (i) Wir nennen eine Teilmenge $V \subset TM$ *offen* wenn für jede differenzierbare Karte $\varphi: U \rightarrow U'$ die Menge $\Phi(V \cap \pi_M^{-1}(U)) \subset U' \times \mathbb{R}^m$ offen ist. Man prüft leicht nach, dass dadurch eine Topologie auf TM gegeben ist. Um zu sehen, dass jedes $\Phi: \pi_M^{-1}(U) \rightarrow U' \times \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus (bezüglich der Unterraumtopologien) ist, stellen wir zunächst fest, dass Φ per Definition offene Teilmengen von $\pi_M^{-1}(U)$ auf offene Teilmengen von $U' \times \mathbb{R}^m$ abbildet. Da Φ bijektiv ist, erhalten wir so die Stetigkeit von Φ^{-1} . Es bleibt zu zeigen, dass Φ selbst stetig ist. Dazu sei $V \subset U' \times \mathbb{R}^m$ offen und $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}'$ eine weitere differenzierbare Karte von M und $\tilde{\Phi}: \pi_M^{-1}(\tilde{U}) \rightarrow \tilde{U}' \times \mathbb{R}^m$ die entsprechende Abbildung. Um zu zeigen,

dass $\Phi^{-1}(V)$ offen ist, müssen wir zeigen, dass $\tilde{\Phi}(\Phi^{-1}(V) \cap \pi_M^{-1}(\tilde{U}))$ offen in \mathbb{R}^{2m} ist. Nun überlegt man sich leicht, dass

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\Phi^{-1}(V) \cap \pi_M^{-1}(\tilde{U})) &= \tilde{\Phi}(\Phi^{-1}(V \cap \varphi(U \cap \tilde{U}))) \\ &= \underbrace{\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}}_{\text{stetig}} \left(\underbrace{V \cap \varphi(U \cap \tilde{U})}_{\text{offen}} \right)\end{aligned}$$

gilt. Da wir bereits wissen, dass die Kompositionen $\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}$ differenzierbar, also insbesondere stetig sind, folgt die Stetigkeit von $\tilde{\Phi}$. Die Hausdorff Eigenschaft und die Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie folgt leicht aus den entsprechenden Eigenschaften von M . Die Eindeutigkeit der Topologie ist ebenfalls nicht schwer zu sehen.

(ii) Es ist klar, dass alle Abbildungen der Form Φ einen Atlas für TM bilden. Da die Kompositionen $\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}$ differenzierbar sind, liegt ein differenzierbarer Atlas vor. Die Differenzierbarkeit von π_M und df sieht man sofort in Kartendarstellungen. Das Diagramm (15) liefert $\varphi \circ \pi_M \circ \Phi^{-1} = \text{pr}_{U'}$ und für df erhalten wir

$$\Psi \circ df \circ \Phi^{-1}(x, v) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x), D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x)v).$$

wobei ψ eine Karte von N ist. □

Somit haben wir zumindest eine sinnvolle differenzierbare Struktur auf TM gefunden. Der folgende Satz fasst das Ergebnis der Konstruktion zusammen und charakterisiert die gefunden differenzierbare Struktur.

Satz 6.10. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann hat das Tangentialbündel TM eine eindeutige Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

- (i) *Die Projektion $\pi_M: TM \rightarrow M$ ist differenzierbar.*
- (ii) *Falls $f: M \rightarrow N$ differenzierbar ist, ist $df: TM \rightarrow TN$ ebenfalls differenzierbar.*
- (iii) *Die kanonischen Trivialisierungen $\tau: T\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ sind Diffeomorphismen.*

Falls $\dim(M) = m$, so gilt $\dim(TM) = 2m$.

Beweis. Es ist klar, dass unsere Konstruktion alle genannten Eigenschaften erfüllt. Umgekehrt folgt aus den drei Eigenschaften, dass für jede Karte $\varphi: U \rightarrow U'$ von M

- aus (i), dass $\pi_M^{-1}(U) \subset TM$ offen ist,
- aus (ii), dass $d\varphi$ und $d\varphi^{-1}$ inverse Diffeomorphismen sind, und
- aus (iii), dass die Komposition $\Phi = \tau \circ d\varphi$ ebenfalls ein Diffeomorphismus ist.

Das heißt, für jede Topologie auf TM , die eine differenzierbare Struktur mit (i), (ii) und (iii) zulässt, sind die Abbildungen Φ notwendigerweise differenzierbare Karten. Aus Satz 6.9 folgt dann allerdings, dass die Topologie mit der von uns konstruierten übereinstimmen muss. Somit landen wir notwendigerweise bei der konstruierten Mannigfaltigkeitsstruktur. Die Aussage über die Dimensionen ist offensichtlich, dass jedes Φ in \mathbb{R}^{2m} abbildet. □

So überzeugend Satz 6.10 auch darlegt, dass es gewissermaßen eine und nur eine „richtige“ Art und Weise gibt, TM zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit zu machen, so berechtigt ist die Frage, was all dies mit der eingangs erwähnten Intuition zu tun hat. Auf diesen Punkt werden wir später zurückkommen.

6.3 Der Einbettungssatz von Whitney

In Satz 3.2 haben wir gesehen, dass jede kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit sich für hinreichend großes n in \mathbb{R}^n einbetten lässt. Im Beweis haben wir ausgehend von einer endlichen Zerlegung der Eins eine konkrete Einbettung konstruiert. Der resultierende Wert von n wächst bei diesem Argument linear mit der Dimension von M sowie der Anzahl von Funktionen in der Zerlegung der Eins. A priori kann n also beliebig groß werden. Mit Hilfe des Satzes von Sard können wir einige der überflüssigen Dimensionen eliminieren. Die Idee ist dabei denkbar einfach. Wir komponieren eine gegebene Einbettung in \mathbb{R}^n einfach mit orthogonalen Projektionen auf Untervektorräume und hoffen, dass die Komposition wieder eine Einbettung ist. Das folgende Lemma ist entscheidend.

Lemma 6.11. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit der Dimension m . Für festes $x \in S^{n-1}$ betrachten wir die orthogonale Projektion*

$$f_x: M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f_x(p) = p - \langle p, x \rangle x.$$

auf das orthogonale Komplement $\langle x \rangle^\perp$. Falls $n > 2m + 1$, so ist f_x für fast alle $x \in S^{n-1}$ eine differenzierbare Einbettung.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass f_x für fast alle $x \in S^{n-1}$ injektiv ist. Für beliebige $p, q \in M$ und $x \in S^{n-1}$ gilt

$$f_x(p) - f_x(q) = (p - q) - \langle p - q, x \rangle x.$$

Folglich ist f_x genau dann injektiv, wenn die Differenzen $p - q \in \mathbb{R}^n$ für verschiedene $p, q \in M$ niemals auf der Gerade $\mathbb{R}x$ liegen. Insbesondere ist f_x injektiv, wenn x nicht im Bild der Abbildung

$$\delta: (M \times M) \setminus \Delta \longrightarrow, \quad \delta(p, q) = \frac{p - q}{|p - q|}$$

liegt, wobei $\Delta = \{(p, p) \mid p \in M\} \subset M \times M$ die Diagonale ist. Nun ist δ offensichtlich differenzierbar und es gilt

$$\dim((M \times M) \setminus \Delta) = 2m < n - 1.$$

Auf Grund der Dimensionen besteht das Bild von δ ausschließlich aus kritischen Werten, und ist somit nach dem Satz von Sard eine Nullmenge in S^{n-1} .

Als nächsten überlegen wir uns, dass f_x für fast alle $x \in S^{n-1}$ eine Immersion ist, das heißt, dass das Differential $d_p f_x: T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R}^n$ für alle $p \in M$ injektiv ist. Sei $p \in M$ und $\iota: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Inklusion. Wir fassen $T_p M$ als Unterraum von \mathbb{R}^n auf, in dem wir $v \in T_p M$ mit $\tilde{v} = \tau_p(d_p \iota(v)) \in \mathbb{R}^n$ identifizieren. Da f_x die Einschränkung der linearen Abbildung $\tilde{f}_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, gegeben durch die selbe Formel $\tilde{f}_x(p) = p - \langle p, x \rangle x$, ist, gilt

$$d_p f_x(v) = 0 \iff D\tilde{f}_x(\tilde{v}) = \tilde{v} - \langle \tilde{v}, x \rangle x = 0 \iff \tilde{v} \in \mathbb{R}x.$$

Das heißt, f_x ist genau dann eine Immersion, wenn die Vektoren $\tilde{v} = \tau_p(d_p \iota(v))$ niemals auf der Gerade $\mathbb{R}x$ liegen. Wir wollen dies wieder mit Hilfe einer Abbildung beschreiben. Wir halten zunächst fest, dass durch

$$| \cdot | : TM \longrightarrow \mathbb{R}, \quad T_p M \ni v \mapsto |v| = |\tilde{v}| = |\tau_p(d_p \iota(v))|$$

eine stetige Abbildung gegeben ist. Die abgeschlossene Menge

$$z(M) = \{v \in TM \mid |v| = 0\} \subset TM$$

besteht genau aus den Nullvektoren aller Tangentialräume. Wir betrachten die Abbildung

$$\nu: TM \setminus z(M) \longrightarrow S^{n-1}, \quad \delta(v) = \frac{\tilde{v}}{|\tilde{v}|}$$

und halten fest, dass f_x injektiv ist falls x nicht im Bild von ν liegt. Nun ist ν differenzierbar und es gilt

$$\dim(TM \setminus z(M)) = 2m < n - 1.$$

Wie zuvor ist das Bild von ν nach dem Satz von Sard eine Nullmenge.

Da die Vereinigung zweier Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, wissen wir nun, dass f_x für fast alle $x \in S^{n-1}$ eine injektive Immersion ist. Da M kompakt ist, ist f_x in diesem Fall automatisch eine Einbettung. \square

Satz 6.12. (Whitney) Sei M eine kompakte m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Einbettung $\iota: M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$.

Beweis. Satz 3.2 liefert eine Einbettung $g: M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ für ein n . Falls $n > 2m + 1$ können wir mit Hilfe von Lemma 6.11 ein $x \in S^{n-1}$ finden, so dass die Komposition

$$f_x: M \rightarrow \langle x \rangle^\perp \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

wieder eine Einbettung ist. Nach insgesamt $(n-2m+1)$ -facher Anwendung dieses Arguments, kommen wir bei einer Einbettung in \mathbb{R}^{2m+1} an. \square

Die Ideen in den Beweisen von Satz 3.2 und Satz 6.12 kann man mit etwas technischer Raffinesse noch um einiges weiter treiben. Zum einen kann man die Forderung der Kompaktheit fallen lassen. Wir skizzieren das Argument.

Satz 6.13. Jede m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit M besitzt eine Einbettung $f: M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$, so dass $f(M) \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ eine abgeschlossene Teilmenge ist.

Beweis. Mit Hilfe einer geeigneten Zerlegung der Eins konstruiert man eine differenzierbare Funktion $h: M \rightarrow [0, \infty)$ mit der Eigenschaft, dass Urbilder kompakter Teilmengen kompakt sind. Nun betrachtet man für $0 < \delta < \epsilon < 1/2$ die Mengen

$$U_i = h^{-1}([i - \delta, i + 1 + \delta]) \subset h^{-1}([i - \epsilon, i + 1 + \epsilon]) = C_i.$$

Wie in den Beweise von Satz 3.2 und Lemma 6.11 konstruiert man nun differenzierbare Abbildungen $g_i: M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$, so dass g_i eingeschränkt auf U_i eine Einbettung ist und außerhalb von C_i verschwindet. Mit etwas technische Geschick setzt man diese Abbildungen zunächst zu einer Einbettung in \mathbb{R}^{4n+3} zusammen und wendet dann Lemma 6.11 an. Das vollständige Argument kann man in [Bre93, II.10.8] nachlesen. \square

Für kompakte Mannigfaltigkeiten kann man folgenden Approximationssatz beweisen. Eine Anleitung dazu findet man in den Hausaufgaben.

Satz 6.14. Sei M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension m . Ferner sei $g: M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ stetig und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es eine differenzierbare Einbettung $f: M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$, so dass

$$|f(p) - g(p)| < \epsilon \quad \text{für alle } p \in M.$$

Für hinreichend kleines ϵ ist f zu g homotop.

7 Vektorfelder, Flüsse und Isotopien

7.1 Vektorfelder

Das Wort Vektorfeld ist eventuell schon in anderen Veranstaltungen gefallen, vermutlich in folgendem Kontext. Für eine offene Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^m$ nennt man differenzierbare Abbildungen $V: U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ häufig Vektorfelder. Die Vorstellung dabei ist, dass in jedem Punkt $p \in U'$ ein Vektor $V(p) \in \mathbb{R}^m$ angeheftet ist, von dort in eine Richtung weist, und

16.12.2019

dass die Vektoren $V(p)$ differenzierbar mit p variieren. Formal ist so ein Vektorfeld jedoch nichts anderes als eine vektorwertige Abbildung, beziehungsweise ein Tupel von Funktionen, mit dem sich praktisch gut arbeiten lässt. Die intuitive Vorstellung „an jedem Punkt ein Pfeil“ lässt sich mit Hilfe des Tangentialbündels sofort auf Mannigfaltigkeiten übertragen.

Definition 7.1. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein **Vektorfeld** auf M ist eine differenzierbare Abbildung $X: M \rightarrow TM$, so dass $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$ (oder äquivalent: $\pi_M \circ X = \text{id}_M$). Die Menge aller Vektorfelder auf M bezeichnen wir mit $\Gamma(TM)$.

Bemerkung. Die Vektorraumstrukturen der Tangentialräume erlaubt es, Vektorfelder punktweise zu addieren und mit Funktionen zu multiplizieren. Für $X, Y \in \Gamma(TM)$ und $f \in C^\infty(M)$ setzen wir

$$(X + Y)(p) = X(p) + Y(p) \quad \text{und} \quad (fX)(p) = f(p)X(p).$$

Die Differenzierbarkeit dieser Konstrukte sieht man leicht in Kartendarstellungen. Die Vektorfelder bilden also insbesondere einen \mathbb{R} -Vektorraum, in dem wir uns auf konstante Funktionen beschränken, und allgemeiner einen Modul über der Algebra $C^\infty(M)$.

Wie schon bei Tangentialvektoren gibt es mehrere, recht verschiedene Möglichkeiten, über Vektorfelder nachzudenken. Hier die drei prominentesten:

lokal: als Tupel lokal definierter Komponentenfunktionen,

algebraisch/analytisch: als Derivationen/Differentialoperatoren auf der Funktionenalgebra $C^\infty(M)$ und

geometrisch: als infinitesimale Bewegungen von Mannigfaltigkeiten.

Aus Zeitgründen beschränken wir uns auf die lokalen und geometrischen Perspektiven. Für die lokale Komponentenbeschreibung betrachten wir zunächst wieder den Fall einer offenen Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^m$. Dort stimmt [Definition 7.1](#) im wesentlichen mit der eingangs erwähnten Beschreibung als Vektorwertige Abbildung überein.

Lemma 7.2. Für $U' \subset \mathbb{R}^m$ offen gibt es eine kanonische Bijektion

$$C^\infty(U', \mathbb{R}^m) \xrightarrow{1:1} \Gamma(TU').$$

Beweis. Aus der Konstruktion der differenzierbaren Struktur des Tangentialbündels ist klar, dass die kanonische Trivialisierung $\tau: TU' \xrightarrow{\cong} U' \times \mathbb{R}^m$ ein Diffeomorphismus ist. Wir erhalten die gewünschte Bijektion, in dem wir $V \in C^\infty(U', \mathbb{R}^m)$ die Abbildung

$$X_V: U' \rightarrow TU', \quad X_V(p) = \tau^{-1}(p, V(p))$$

zuordnen. Offensichtlich gilt $X_V(p) \in T_pU'$ für alle $p \in U'$. Um die Differenzierbarkeit von X_V zu prüfen, können wir die globalen Karten $\text{id}_{U'}$ für U' und τ für TU' verwenden. Die lokale Darstellung von X_V ist dann nichts anderes als die Abbildung $p \mapsto (p, V(p))$, also differenzierbar. Umgekehrt erhalten wir aus jedem Vektorfeld $X: U' \rightarrow TU'$ durch Komposition mit τ und der Projektion $\text{pr}_{\mathbb{R}^m}: U' \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung $U' \rightarrow \mathbb{R}^m$. Man überzeugt sich leicht, dass beide Konstruktionen zueinander invers sind. \square

Sei nun M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $X: M \rightarrow TM$ eine zunächst nicht notwendigerweise differenzierbare Abbildung mit $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$. Wir betrachten eine differenzierbare Karte $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ von M und erinnern uns an das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Phi & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 TM|_U & \xrightarrow{d\varphi} & T\mathbb{R}^m|_{U'} & \xrightarrow{\tau} & U' \times \mathbb{R}^m \\
 \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_{U'} & \swarrow \text{pr}_{\mathbb{R}^m} & \\
 U & \xrightarrow{\varphi} & U' & &
 \end{array}$$

mit dem wir die differenzierbaren Karten $\Phi: TM|_U \rightarrow U' \times \mathbb{R}^m$ definiert hatten. Die Komposition

$$X^\varphi(p) := \text{pr}_{\mathbb{R}^m} \circ \Phi \circ X|_U(p)$$

liefert eine Abbildung $X^\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, deren Komponentenfunktionen $X_1^\varphi, \dots, X_m^\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ wir die **lokalen Komponenten** von X bezüglich φ nennen. Die Kartendarstellung von X bezüglich φ und Φ ist dann gegeben als

$$\Phi \circ X \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m}, \quad x \mapsto (x, X^\varphi \circ \varphi^{-1}(x)).$$

Insbesondere ist X genau dann differenzierbar auf U wenn X^φ differenzierbar ist.⁷

Lemma 7.3. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Karte.*

(i) *Sei $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}^m$ die Standardbasis. Dann sind durch*

$$\partial_i^\varphi: U \rightarrow TM|_U, \quad \partial_i^\varphi(p) = \Phi^{-1}(\varphi(p), e_i)$$

Vektorfelder auf U gegeben.

(ii) *Für jedes $p \in U$ bilden $\partial_1^\varphi(p), \dots, \partial_m^\varphi(p)$ eine Basis von T_pM .*

(iii) *Sei $X: M \rightarrow TM$ eine Abbildung mit $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$. Dann gilt für alle $p \in U$*

$$X(p) = \sum_{i=1}^m X_i^\varphi(p) \partial_i^\varphi(p).$$

Insbesondere ist die Einschränkung $X|_U$ eindeutig durch die lokalen Komponenten $X_1^\varphi, \dots, X_m^\varphi$ bestimmt, und dort differenzierbar genau dann wenn dies für die Komponenten der Fall ist.

Beweis. (i) ist trivial, man teste die Differenzierbarkeit in den Karten φ und Φ . (ii) folgt aus der Beobachtung, dass die Komposition $\text{pr}_{\mathbb{R}^m} \circ \Phi$ eingeschränkt auf T_pM einen linearen Isomorphismus $T_pM \cong \mathbb{R}^m$ liefert, der $\partial_i^\varphi(p)$ auf e_i schickt. (iii) folgt sofort aus (ii) und den Definitionen. \square

Die ∂_i^φ heißen die **Koordinatenvektorfelder** von der Karte φ . Für diese sieht man auch häufig die ausschweifendere Notation

$$\partial_i^\varphi(p) = \left. \frac{\partial}{\partial x_i^\varphi} \right|_p,$$

die den Derivationsaspekt besonders betont, den wir hier nur kurz ansprechen.

Bemerkung. Für jedes Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ können wir den Wert bei $p \in M$ als Derivation $X(p): C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ auffassen. Für ein festes $f \in C^\infty(M)$ erhalten wir durch punktweise Auswertung dieser Derivationen eine neue Funktion

$$X[f]: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad X[f](p) = X(p)[f].$$

Wenig überraschend stellt sich diese als differenzierbar heraus. Das Vektorfeld liefert also eine Abbildung

$$X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad f \mapsto X[f].$$

Diese erfüllt $X[f \cdot g] = f \cdot X[g] + X[f] \cdot g$. Derartige Abbildungen nennt man (globale) **Derivationen** der Algebra $C^\infty(M)$. Man kann zeigen, dass das Vektorfeld X eindeutig durch die beschriebene Derivation bestimmt ist, und dass jede Derivation durch ein Vektorfeld induziert wird. Das hat die überraschende Konsequenz, dass man im Prinzip von Vektorfeldern sprechen kann, ohne sich jemals über das Tangentialbündel Gedanken gemacht zu haben. Dieser zugegebenermaßen elegante Zugang verschleiert allerdings komplett die anschauliche, geometrische Intuition, die in der Differentialtopologie steckt.

⁷Nachtrag vom 7.1.2020: Dieser Absatz wurde nachträglich etwas verändert.

7.2 Flüsse

Nun wenden wir uns der geometrischen Interpretation von Vektorfeldern als infinitesimale Bewegungen zu. Sei wie zuvor M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension m und $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld. Aus der geometrischen Interpretation der Tangentialräume wissen wir, dass es für jedes $p \in M$ eine Kurve $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ gibt, die den Vektor $X(p) \in T_pM$ darstellt. Es stellt sich heraus, dass wir diese Kurven systematisch für alle $p \in M$ auf einmal wählen können. Genauer werden wir eine differenzierbare Abbildung $\phi^X: U^X \rightarrow M$ konstruieren, wobei $U^X \subset M \times \mathbb{R}$ eine offene Umgebung von $M \times \{0\}$ ist, so dass die Abbildung $t \mapsto \phi^X(p, t)$ eine Kurve ist, die $X(p)$ darstellt. Intuitiv können wir uns diese ϕ^X also als differenzierbare Kurvenschar vorstellen.

Richtungsvektoren und Integralkurven. Zunächst machen wir uns noch einmal Gedanken über Richtungsvektoren von Kurven. Sei $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve. Für jedes $s \in (a, b)$ erhalten wir einen **Richtungsvektor** oder auch **Geschwindigkeitsvektor**

$$\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}.$$

Dieser lässt sich auf mehrere Arten und Weisen beschreiben:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(s) &= [t \mapsto \gamma(s+t)]_{\gamma(s)} \text{(geometrisch)} \\ &= \sum_{i=1}^m (\varphi \circ \gamma)'_i(s) \partial_i^\varphi(\gamma(s)) \text{(lokal)} \\ &= d_s \gamma(\partial_t(s)). \end{aligned}$$

Hierbei ist φ eine Karte von M um $\gamma(s)$ und ∂_t ist das kanonische Koordinatenvektorfeld auf \mathbb{R} . Des Weiteren bezeichnet $(\varphi \circ \gamma)'_i$ die Ableitung der i ten Komponente der Kartendarstellung $\varphi \circ \gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definition 7.4. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld. Eine Kurve $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ heißt **Integralkurve** von X falls

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) \quad \text{für alle } t \in (a, b). \quad (16)$$

Falls $0 \in (a, b)$ nennen wir $\gamma(0) \in M$ den **Startwert** von γ .

Eine Kurve $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ ist also genau dann eine Integralkurve von X , sie zu jedem Zeitpunkt die durch X vorgegebene Geschwindigkeit hat. Um Integralkurven zu finden, schauen wir uns die Bedingung (16) mit Hilfe einer Karte φ von M um einen Punkt $\gamma(s_0)$ für ein festes $s_0 \in (a, b)$ an. Einerseits haben wir für s nahe s_0

$$\dot{\gamma}(s) = \sum_{i=1}^m (\varphi \circ \gamma)'_i(s) \partial_i^\varphi(\gamma(s)).$$

Andererseits haben wir für X die Darstellung

$$\begin{aligned} X(\gamma(p)) &= \sum_{i=1}^m X_i^\varphi(\gamma(s)) \partial_i^\varphi(\gamma(s)) \\ &= \sum_{i=1}^m X_i^\varphi \circ \varphi^{-1}((\varphi \circ \gamma)(s)) \partial_i^\varphi(\gamma(s)). \end{aligned}$$

Da die Koordinatenvektoren ∂_i^φ an jedem Punkt eine Basis bilden, müssen alle Komponentenfunktionen übereinstimmen. Die Bedingung $\dot{\gamma}(s) = X(\gamma(s))$ ist also nahe s_0 äquivalent zu

$$(\varphi \circ \gamma)'_i(s) = (X_i^\varphi \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ \gamma)(s)), \quad i = 1, \dots, m. \quad (17)$$

Dies ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung. Für diese steht eine relativ umfassende Lösungstheorie zur Verfügung.

Exkurs: Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung. Unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung verstehen wir eine formale Gleichung $\dot{x} = F(x)$, wobei F eine auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ definierte Abbildung mit Werten in \mathbb{R}^n ist. Wir nehmen wie immer an, dass $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ unendlich oft differenzierbar ist. Eine **Lösung** von $\dot{x} = F(x)$ ist eine differenzierbare Abbildung $g: I \rightarrow U$, definiert auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so dass $g'(t) = F(g(t))$ für alle $t \in I$ gilt (oder äquivalent: $g' = F \circ g$). Falls $\tilde{g}: \tilde{I} \rightarrow U$ eine weitere Lösung ist, so dass $I \subset \tilde{I}$ und $g = \tilde{g}|_I$ gelten, nennt man \tilde{g} eine **Fortsetzung** von g . Eine Lösung heißt **maximal** wenn sie keine echte Fortsetzung besitzt. Der folgende fundamentale Satz, der üblicherweise in Analysis II behandelt wird, stellt die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu gegebenen Startwerten sicher.

Satz (Picard–Lindelöf). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar.

- (i) Seien $g: I \rightarrow U$ und $\tilde{g}: \tilde{I} \rightarrow U$ Lösungen von $\dot{x} = F(x)$. Falls $g(s_0) = \tilde{g}(s_0)$ für ein $s_0 \in I \cap \tilde{I}$, so stimmen g und \tilde{g} auf ganz $I \cap \tilde{I}$ überein.
- (ii) Für jedes $x \in U$ gibt es eine offene Umgebung $V_x \subset U$, ein $\epsilon_x > 0$ und eine differenzierbare Abbildung $g: V_x \times (-\epsilon_x, \epsilon_x) \rightarrow U$, so dass

$$\frac{\partial g}{\partial t}(y, s) = F(g(y, s)) \quad \text{und} \quad g(y, 0) = y \quad \text{für alle } (y, s) \in V_x \times (-\epsilon_x, \epsilon_x).$$

Insbesondere gibt es für jedes $x \in U$ eine eindeutige maximale Lösung $g_x: I_x \rightarrow U$ mit $0 \in I_x$ und $g_x(0) = x$.

Beide Aussagen haben direkte Konsequenzen für die Existenz von Integralkurven von Vektorfeldern auf Mannigfaltigkeiten.

Anwendung auf Integralkurven. Sei nun wieder M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld. Wie bei Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen nennen wir eine Integralkurve $\tilde{\gamma}: \tilde{I} \rightarrow M$ eine **Fortsetzung** von $\gamma: I \rightarrow M$ falls $I \subset \tilde{I}$ und $\gamma = \tilde{\gamma}|_I$. Ebenso nennen wir eine Integralkurve **maximal** falls sie keine echte Fortsetzung zulässt.

Satz 7.5. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld.

- (i) Für jedes $p \in M$ existiert eine eindeutige maximale Integralkurve $\gamma_p^X: I_p^X \rightarrow M$ mit $0 \in I_p^X$ und $\gamma_p^X(0) = p$.
- (ii) Die Menge $U^X = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times I_p^X$ ist eine offene Umgebung von $M \times \{0\}$ in $M \times \mathbb{R}$ und die Abbildung

$$\phi^X: U^X \longrightarrow M, \quad \phi^X(p, t) = \gamma_p^X(t)$$

ist differenzierbar.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für Integralkurven analoge Aussagen wie im Satz von Picard–Lindelöf gelten.

Behauptung 1: Seien $\gamma_1: I_1 \rightarrow M$ und $\gamma_2: I_2 \rightarrow M$ Integralkurven von X , so dass $\gamma_1(s_0) = \gamma_2(s_0)$ für ein $s_0 \in I_1 \cap I_2$ gilt. Dann stimmen γ_1 und γ_2 auf $I_1 \cap I_2$ überein.

Sei $I_{12} \subset I_1 \cap I_2$ die Menge der $s \in I_1 \cap I_2$, an denen $\gamma_1(s) = \gamma_2(s)$ gilt. Da Integralkurven stetig sind, ist I_{12} abgeschlossen in $I_1 \cap I_2$ (bezüglich der Unterraumtopologie!). Wir behaupten, dass I_{12} ebenfalls offen ist. Um dies zu sehen sei $s \in I_{12}$. Wir wählen eine Karte $\varphi: U \rightarrow U'$ von M mit $\gamma(s) \in U$. Dann sind $\varphi \circ \gamma_1$ und $\varphi \circ \gamma_2$ nach (17) Lösungen von $\dot{x} = (X^\varphi \circ \varphi^{-1})(x)$. Da diese in s übereinstimmen müssen sie nach Picard–Lindelöf auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen. Da dieser eine offene Umgebung von s enthalten muss, gilt dasselbe von I_{12} . Da I_{12} nicht leer ist und $I_1 \cap I_2$ als Schnitt zweier offener Intervalle wieder ein solches, insbesondere als zusammenhängend ist, folgt $I_{12} = I_1 \cap I_2$.

Behauptung 2: Für jedes $p \in M$ existieren eine offene Umgebung V_p , $\epsilon_p > 0$ und eine differenzierbare Abbildung $\phi_p: V_p \times (-\epsilon_p, \epsilon_p) \rightarrow M$, so dass $t \mapsto \phi_p(q, t)$ für festes $q \in V_p$ eine Integralkurve von X mit $\phi(q, 0) = 0$ ist.

Für $p \in M$ wählen wir eine Karte $\varphi: U \rightarrow U'$ mit $p \in U$ und betrachten die Differentialgleichung $\dot{x} = (X^\varphi \circ \varphi^{-1})(x)$. Teil (ii) von Picard–Lindelöf liefert eine offene Umgebung $V'_p \subset U'$ von $\varphi(p)$, ein $\epsilon_p > 0$ und eine differenzierbare Abbildung $g: V'_p \times (-\epsilon_p, \epsilon_p) \rightarrow U'$, so dass $g(y, t)$ für festes y eine Lösung mit $g(y, 0) = y$ ist. Wir setzen $V_p = \varphi^{-1}(V'_p)$ und definieren

$$\phi_p: V_p \times (-\epsilon_p, \epsilon_p) \longrightarrow U, \quad \varphi(p, t) = \varphi^{-1}(g(\varphi(p), t)).$$

Wegen (17) ist $\phi_p(q, \cdot): (-\epsilon_p, \epsilon_p) \rightarrow M$ für festes $q \in V_x$ eine Integralkurve von X .

Nun können wir (i) und (ii) simultan folgern. Die gesuchte maximale Integralkurve $\gamma_p^X: I_p^X \rightarrow M$ erhalten wir, indem wir zunächst I_p^X als Vereinigung *aller* Definitionsintervalle von Integralkurven $\gamma: I \rightarrow M$ von X mit $0 \in I$ und $\gamma(0) = p$ definieren, und dann $\gamma_p^X|_I = \gamma$ setzen. Die Wohldefiniertheit und Eindeutigkeit von γ_p^X folgt aus dem Analog Behauptung 1, die Existenz aus Behauptung 2. Ebenso folgt aus Behauptung 1 für die Abbildung $\phi^X: U^X \rightarrow M$, dass die offene Menge $V_p \times (-\epsilon_p, \epsilon_p)$ in U^X enthalten ist, und dass ϕ^X dort mit ϕ_p übereinstimmt. Insbesondere ist U^X also offen in $M \times \mathbb{R}$, die Abbildung ϕ^X ist differenzierbar. \square

An dieser Stelle haben wir die in der Einleitung dieses Abschnitts erwähnte Kurvenschar $\phi^X: U^X \rightarrow M$ gefunden. Man nennt ϕ^X den **Fluss** von X .

6.1.2020

Ein Perspektivwechsel. Bisher haben wir uns den Fluss $\phi^X: U^X \rightarrow M$, indem wir für festes $p \in M$ die Abbildung $\phi^X(p, \cdot) = \gamma_p^X$ betrachtet haben, als Kurvenschar vorgestellt. Es stellt sich allerdings als mindestens genauso sinnvoll heraus, für festes $t \in \mathbb{R}$ die Abbildungen

$$\phi_t^X: \{p \in M \mid t \in I_p^X\} \longrightarrow M, \quad \phi_t^X(p) = \phi^X(p, t) = \gamma_p^X(t)$$

zu betrachten. Der Definitionsbereich $\{p \in M \mid t \in I_p^X\}$ ist eine offene Teilmenge von M und wir stellen uns vor, dass sie von ϕ_t^X entlang der Integralkurven von X bewegt wird. Im Idealfall ist ϕ_t^X auf ganz M definiert, so dass die ganze Mannigfaltigkeit bewegt wird. Allerdings ist diese nicht immer gewährleistet, wie wir später sehen werden.

Satz 7.6. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld.*

(i) *Seien $p \in M$ und $s, t \in \mathbb{R}$. Es gilt $\phi_0^X(p) = p$ und wann immer beide Seiten definiert sind gilt*

$$\phi_{s+t}^X(p) = \phi_s^X \circ \phi_t^X(p). \tag{18}$$

(ii) *Falls $U^X = M \times \mathbb{R}$, so ist $\phi_t^X: M \rightarrow M$ ein auf ganz M definierter Diffeomorphismus.*

(iii) *Falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $M \times (-\epsilon, \epsilon)$ in U^X enthalten ist – das heißt, falls alle maximalen Integralkurven von X mindestens für $|t| < \epsilon$ definiert sind – gilt $U^X = M \times \mathbb{R}$.*

(iv) *Falls M kompakt ist oder X kompakten Träger hat, so gilt $U^X = M \times \mathbb{R}$.*

Beweis. (i) Zunächst gilt per Definition $\phi_0^X(p) = \gamma_p^X(0) = p$. Die Identität (18) folgt aus der Beobachtung, dass $s \mapsto \phi_{s+t}^X(p)$ und $s \mapsto \phi_s^X(\phi_t^X(p))$ beides maximale Integralkurven von X mit Startwert $\phi_t^X(p)$ sind.

(ii) Mit (i) erhalten wir nun

$$\phi_{-t}^X(\phi_t^X(p)) = \phi_0^X(p) = p \text{ für alle } (p, t) \in M \times \mathbb{R}.$$

Folglich sind ϕ_t^X und ϕ_{-t}^X inverse Diffeomorphismen von M .

(iii) Dies folgt mit einem netten Trick ebenfalls aus (i). Angenommen jede maximale Integralkurve γ_p^X ist für $|t| < \epsilon$ definiert. Durch Iterierung von (i) erhalten wir

$$\gamma_p^X(t) = \phi_t^X(p) = \phi_{t/2}^X(\phi_{t/2}^X(p)) = \cdots = (\phi_{t/n}^X)^n(p)$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Die rechte Seite ist nun allerdings für $|t| < n\epsilon$ definiert und beschreibt ebenfalls eine Integralkurve mit Startwert p . Daraus folgt aber, dass jede maximale Integralkurve auf ganz \mathbb{R} definiert sein muss, was zu zeigen war.

(iv) Für $p \in \text{supp}(X)$ wählen wir $V_p \subset M$ offen und $\epsilon_p > 0$, so dass $V_p \times (-\epsilon_p, \epsilon_p) \subset U^X$. Dies ist möglich, weil U^X nach [Satz 7.5](#) offen ist. Falls $\text{supp}(X)$ kompakt ist, genügen endlich viele Mengen V_{p_1}, \dots, V_{p_r} , um $\text{supp}(X)$ zu überdecken. Es folgt, dass γ_p^X für alle $p \in \text{supp}(X)$ mindestens für $|t| < \epsilon = \min \epsilon_{p_1}, \dots, \epsilon_{p_r} > 0$ definiert sind. Für $p \in M$ außerhalb von $\text{supp}(X)$ gilt $X(p) = 0$, so dass γ_p^X konstant und somit auf ganz \mathbb{R} definiert ist, insbesondere also auf $(-\epsilon, \epsilon)$. Somit folgt $U^X = M \times \mathbb{R}$ aus (iii). \square

Definition 7.7. Sei $U \subset M \times \mathbb{R}$ eine offene Umgebung von $M \times \{0\}$. Eine differenzierbare Abbildung $\phi: U \rightarrow M$ heißt **(lokaler) Fluss** auf M falls folgende Eigenschaften für alle $p \in M$ erfüllt sind:

- (1) Die Menge $I_p^\phi = \{t \in \mathbb{R} \mid (p, t) \in U\}$ ist ein offenes Intervall.
- (2) Es gilt $\phi_0(p) = \phi(p, 0) = p$ und für alle $s, t \in I_p^\phi$ mit $s + t \in I_p^\phi$ gilt

$$\phi_{s+t}(p) = \phi_s \circ \phi_t(p).$$

Ein Fluss $\phi: U \rightarrow M$ heißt **maximal** falls es keinen Fluss $\tilde{\phi}: \tilde{U} \rightarrow M$ mit $U \subsetneq \tilde{U}$ gibt, der auf U mit ϕ übereinstimmt. Falls $U = M \times \mathbb{R}$ spricht man von einem **globalen Fluss**.

Aus [Satz 7.5](#) und [Satz 7.6\(i\)](#) folgt, dass der Fluss ϕ^X eines Vektorfeldes $X \in \Gamma(TM)$ ein maximaler Fluss im Sinne von [Definition 7.7](#) ist. Die Eigenschaften (ii)–(iv) in [Satz 7.6](#) gelten analog für lokale Flüsse, mit dem selben Beweis. Umgekehrt lässt sich aus jedem lokalen Fluss $\phi: U \rightarrow M$ ein Vektorfeld X^ϕ gewinnen, indem wir die „Integralkurven“ $\gamma_p^\phi = \phi(p, \cdot)$ betrachten und

$$X^\phi(p) = \dot{\gamma}_p^\phi(0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(\varphi \circ \phi \circ (\varphi \times \text{id}_{\mathbb{R}})^{-1})_i}{\partial t}(\varphi(p), 0), \partial_i^\varphi(p) \in T_p M$$

definieren. Die zweite Beschreibung benutzt eine Karte φ um p und macht die Differenzierbarkeit von ϕ ersichtlich. Die erste Beschreibung macht offensichtlich, dass wir so aus ϕ^X das Vektorfeld X zurück gewinnen. Der Fluss von X^ϕ ist hingegen eine maximale Fortsetzung von ϕ , die a posteriori eindeutig bestimmt ist. Wir erhalten somit inverse Bijektionen:

$$\begin{array}{ccc} & X \mapsto \phi^X & \\ & \curvearrowright & \\ \{\text{Vektorfelder auf } M\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{\text{maximale Flüsse auf } M\} \\ & \curvearrowleft & \\ & \phi \mapsto X^\phi & \end{array}$$

Bemerkung. Für ein kompakt getragenes Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ ist der Fluss $\phi^X: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ nach [Satz 7.6](#) auf ganz $M \times \mathbb{R}$ definiert und es gilt $\phi_0^X = \text{id}_M$ und $\phi_{s+t}^X = \phi_s^X \circ \phi_t^X$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Für diejenigen, die diese Sprache kennen: somit ist ϕ^X eine Gruppenwirkung der Gruppe \mathbb{R} auf M .

Einige Beispiele. Nach all der Theorie betrachten wir nun einige einfache Beispiele, die verschiedene Aspekte verdeutlichen.

- (1) Zunächst betrachten wir die durch $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 \pm y^2)$ gegebene Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und ihren (klassischen) Gradienten $\nabla f(x, y) = (x, \pm y)$. Letzteren können wir mit Hilfe von [Lemma 7.2](#) als Vektorfeld

$$X = x \partial_x \pm y \partial_y \in \Gamma(T\mathbb{R}^2)$$

auffassen. Hierbei sind ∂_x und ∂_y die Koordinatenvektorfelder der kartesischen Koordinatenfunktionen $x, y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Die Integralkurven von X entsprechen dann genau den Lösungen des System von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = x \quad \text{und} \quad \dot{y} = \pm y.$$

Dies sind bekanntermaßen Exponentialfunktionen und wir erhalten für $p \in \mathbb{R}^2$

$$\gamma_p^X(t) = \phi^X(p, t) = (x(p) e^t, y(p) e^{\pm t}).$$

Es ist instruktiv, sich die Integralkurven und Vektorfelder bildlich zu veranschaulichen. Insbesondere stellen wir fest, dass der Fluss ϕ^X auf ganz $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ definiert ist, obwohl X keinen kompakten Träger hat. Letztere Bedingung ist also nicht zwingend notwendig, um einen globalen Fluss zu garantieren. Eine praktikable Charakterisierung, welche Vektorfelder globale Flüsse erzeugen ist dem Autor nicht bekannt.

- (2) Als nächstes betrachten wir das Vektorfeld

$$X = -x^2 \partial_x \in \Gamma(T\mathbb{R})$$

auf der reellen Gerade. Dies entspricht der gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{x} = -x^2$, deren Lösungen von der Form $t \mapsto \frac{1}{t+a}$ sind. Wir erhalten also:

$$\gamma_p^X(t) = \phi^X(p, t) = \begin{cases} \frac{1}{t+\frac{1}{p}}, & p \neq 0 \\ 0, & p = 0 \end{cases}$$

Der Definitionsbereich von γ_p^X ist gegeben durch

$$I_p^X = \begin{cases} (-1/p, \infty), & p > 0 \\ (-\infty, \infty), & p = 0 \\ (-\infty, -1/p), & p < 0, \end{cases}$$

so dass der Definitionsbereich U^X der Flusses ϕ^X genau die offene Umgebung des Koordinatenkreuzes in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist, die durch die Hyperbel $t = -1/p$ eingeschlossen wird. Hierbei fällt auf, dass der Fluss von X zumindest auf $(0, \infty)$ in global bis in alle Ewigkeit vorwärts fließt, jedoch nur eingeschränkt rückwärts.

- (3) Schließlich betrachten wir ein Beispiel eines Flusses, zunächst auf \mathbb{R}^3 und dann auf S^2 . Durch die Formel

$$\tilde{\phi}_\theta(x, y, z) = \tilde{\phi}(x, y, z, \theta) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$$

wird eine Drehung um die z -Achse mit Drehwinkel θ beschrieben. Die Eigenschaften $\tilde{\phi}_0 = \text{id}$ und $\tilde{\phi}_\alpha \circ \tilde{\phi}_\beta = \tilde{\phi}_{\alpha+\beta}$ sind für Drehungen hinlänglich bekannt. Die Drehungen beschreiben also einen globalen Fluss $\tilde{\phi}$ auf \mathbb{R}^3 . Da Drehungen außerdem längenerhaltend sind, gilt $\tilde{\phi}(S^2) \subset S^2$ und wir erhalten durch Einschränkung einen globalen Fluss

$$\phi = \tilde{\phi}|_{S^2}: S^2 \times \mathbb{R} \rightarrow S^2.$$

Das erzeugende Vektorfeld \tilde{X} von $\tilde{\phi}$ können wir in kartesischen Koordinaten berechnen, indem wir die gewöhnliche partielle Ableitung nach θ bilden und für $\theta = 0$ auswerten. Wir erhalten

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta}(x, y, y, 0) = (-x \sin 0 - y \cos 0, x \cos 0 - y \sin 0, 0) = (-y, x, 0).$$

und daraus ergibt sich anders geschrieben

$$\tilde{X} = -y \partial_x + x \partial_y \in \Gamma(T\mathbb{R}^3).$$

Da die Integralkurven mit Startwerten $p \in S^2$ innerhalb der Sphäre verlaufen liegt $\tilde{X}(p)$ im Tangentialraum $T_p S^2$ der Sphäre, den wir wie üblich mit seinem Bild in $T_p \mathbb{R}^3$ unter dem Differential der Inklusion identifizieren. Somit können wir die Einschränkung $\tilde{X}|_{S^2}: S^2 \rightarrow T\mathbb{R}^3$ mit dem Erzeugenden Vektorfeld $X \in \Gamma(TS^2)$ von ϕ identifizieren.

7.3 Isotopien

Wie mehrfach angedeutet, können wir uns einen (globalen) Fluss $\phi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ als eine Bewegung von M vorstellen. Die Flusseigenschaft ist für diese Vorstellung allerdings nicht unbedingt wesentlich. Verzichteten wir darauf, landen wir bei einem allgemeineren Konzept. Im Folgenden schreiben wir kurz $I = [0, 1]$ für das Einheitsintervall.

Definition 7.8. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit

- (a) Eine **Isotopie** von M ist eine differenzierbare Abbildung $\phi: M \times I \rightarrow M$, so dass $\phi_t = \phi(\cdot, t): M \rightarrow M$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus ist und $\phi_0 = \text{id}_M$.
- (b) Wir nennen zwei Untermannigfaltigkeiten $S, S' \subset M$ (**ambient**) **isotop** in M , im Zeichen $S \sim_M S'$, falls es eine Isotopie ϕ von M gibt, so dass $S' = \phi_1(S)$.

Hierbei bedeutet Differenzierbarkeit in einem „Randpunkt“ der Form $(p, r) \in M \times \{0, 1\}$, dass es eine offene Umgebung \tilde{U} von (p, r) in $M \times \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Abbildung $\tilde{\phi}: \tilde{U} \rightarrow M$, die auf $\tilde{U} \cap (M \times I)$ mit ϕ übereinstimmt.

Die Vorstellung bei ambienter Isotopie ist hierbei, dass $S = \phi_0(S)$ mit Hilfe von ϕ durch eine Familie von Untermannigfaltigkeiten $S_t = \phi_t(S)$ in S' verformt wird, und das auf differenzierbare Art und Weise. Insbesondere müssen S und S' als Mannigfaltigkeiten diffeomorph sein, um überhaupt in M isotop sein zu können. Ambiente Isotopie ist (wenig überraschend) eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Untermannigfaltigkeiten von M und beschreibt gewissermaßen den stärksten Ähnlichkeitsbegriff in der Differentialtopologie. Ambient isotope Untermannigfaltigkeiten werden in der Regel als „so gut wie identisch“ behandelt und viele Objekte stellen sich als „eindeutig bis auf (ambient) Isotopie“ heraus. Diese Philosophie werden wir im nächsten Kapitel bei der Diskussion von Tubenumgebungen besser verstehen lernen.

Zunächst sollten wir uns allerdings kurz überlegen, dass ambiente Isotopie tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist. Offensichtlich ist jede Untermannigfaltigkeit $S \subset M$ zu sich selbst via der stationären Isotopie $\phi(p, t) = p$ (d.h. $\phi_t \equiv \text{id}_M$) isotop. Falls $S \sim_M S'$ via einer Isotopie ϕ , gilt außerdem $S' \sim_M S$ via der Isotopie $\tilde{\phi}(p, t) = \phi_t^{-1} \circ \phi_{1-t}(p)$. Beim Nachweis der Transitivität treten ähnliche Probleme auf wie bei Homotopien. Naiv würde man Isotopien ϕ und $\tilde{\phi}$ von M gerne wie folgt verketten:

$$\tilde{\phi} \circ \phi(p, t) = \begin{cases} \phi_{2t}, & t \leq 1/2 \\ \tilde{\phi}_{2t-1} \circ \phi_1, & t \geq 1/2. \end{cases} \quad (19)$$

Bemerkung. Die Verkettung von Isotopien und Homotopien sind formal ähnlich, aber nicht identisch. Beim Vergleich von (19) mit (10) fallen zwei Unterschiede auf. Da wäre zunächst die unterschiedliche Reihenfolge, die allerdings nur eine Frage der Konvention ist. Etwas wesentlicher ist das Auftreten der Komposition mit ϕ_1 in (19). Der Grund liegt darin, dass Isotopien, aufgefasst als Wege in $\text{Diff}(M)$, immer bei der Identitätsabbildung beginnen. Erst durch die Komposition erhält man Wege, die man nacheinander durchlaufen kann.

Leider ist die Konstruktion in (19) bei $t = 1/2$ nicht ohne weiteres differenzierbar. Dieses Problem lässt sich genau wie bei Homotopien umgehen: man definiert zunächst **technische Isotopien** als differenzierbare (also insbesondere technische) Homotopien $\phi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ mit $\phi_0 = \text{id}_M$ und $\phi_t \in \text{Diff}(M)$ für alle t . Jede technische Isotopie liefert durch Einschränkung auf $M \times I$ eine Isotopie im Sinne von Definition 7.8. Umgekehrt erhält man aus einer Isotopie $\phi: M \times I \rightarrow M$ eine technische Isotopie $\phi^{\text{tech}}: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ mit $\phi_0^{\text{tech}} = \phi_0$ und $\phi_1^{\text{tech}} = \phi_1$, indem man eine differenzierbare Funktion $\tau: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ mit $\tau(t) = 0$ für $t \leq \epsilon$ und $\tau(t) = 1$ für $t \geq 1 - \epsilon$ wählt und $\phi^{\text{tech}}(p, t) = \phi(p, \tau(t))$ setzt. Folglich kann man ambiente Isotopie von Untermannigfaltigkeiten genau so gut mit technischen Isotopien erklären, die sich problemlos wie in (19) verketteten lassen.

Der folgende Gedankengang ist einer der Grundpfeiler der Differentialtopologie:

- Isotopien sind oft nützlich, um Dinge „zurecht zu rücken“.
- Vektorfelder liefern (spezielle!) Isotopien.
- Vektorfelder lassen sich verhältnismäßig einfach konstruieren.

Die Konstruktion von Vektorfeldern läuft oft nach dem Prinzip ab, dass auf einer offenen Teilmenge $U \subset M$, zum Beispiel ein Kartengebiet, ein Vektorfeld $X: U \rightarrow TM|_U$ mit guten Eigenschaften gegeben ist. Nun wählt man eine geeignete Abschneidefunktion $\rho: M \rightarrow [0, 1]$ mit Träger in U , setzt das Vektorfeld ρX durch Null auf ganz M fort. Wir illustrieren dieses Prinzip mit einer harmlos wirkenden, aber nützlichen Beobachtung, die es erlaubt, einzelne Punkte „zurecht zu rücken“.

Lemma 7.9. *Sei M eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für beliebige $p, q \in M$ gibt es eine Isotopie $\phi: M \times I \rightarrow M$ mit $\phi_1(p) = q$. Mit anderen Worten, alle Punkte in M sind paarweise ambient isotop zueinander.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Spezialfall $M = \mathbb{R}^m$ und $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^m$. In diesem Fall ist die Lösung des Problems offensichtlich. Translation mit $y_0 - x_0$ liefert eine geeignete Isotopie:

$$\phi^{y_0 - x_0}: \mathbb{R}^m \times I \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \phi^{y_0 - x_0}(x, t) = x + t(y_0 - x_0)$$

Wir beobachten, dass diese Isotopie die Einschränkung des Flusses des Vektorfelds auf \mathbb{R}^m ist, dass der konstanten Abbildung $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Wert $y_0 - x_0$ ist. Diese Beobachtung benutzen wir im allgemeinen Fall, um geeignete „konstante“ Vektorfelder lokal mit Hilfe von Karten auf allgemeine Mannigfaltigkeiten zu verpflanzen.

13.1.2020

Sei nun M eine beliebige zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Für $p \in M$ betrachten wir die Isotopieklasse

$$[p] = \{q \in M \mid q \sim_M p\}$$

Wir müssen zeigen, dass $[p] = M$ gilt. Da ambiente Isotopie eine Äquivalenzrelation und M zusammenhängend ist, genügt es zu zeigen, dass $[p]$ offen ist. Seien also p beliebig aber fest und $p_0 \in [p]$ gegeben. Wir wählen in einer Umgebung von p_0 eine Karte der Form

$$\varphi: U \xrightarrow{\cong} B_3(0) \subset \mathbb{R}^m \quad \text{mit} \quad \varphi(p_0) = 0$$

und eine differenzierbare Abschneidefunktion

$$\kappa: \mathbb{R}^m \longrightarrow [0, 1] \quad \text{mit} \quad \kappa(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| \geq 2. \end{cases}$$

Wir wollen nun zeigen, dass jeder Punkt der offenen Menge $U_1 = \varphi^{-1}(B_1(0))$ ambient isotop zu p_0 und somit auch zu p ist. Da $p_0 \in [p]$ beliebig war, folgt daraus die Offenheit von $[p]$. Für gegebenes $q_0 \in U_1$ betrachten wir das Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ gegeben durch

$$X(q) = \sum_{i=1}^m \kappa(\varphi(q)) \varphi(q_0)_i \partial_i^\varphi(q).$$

Für $q \in U_1$ gilt dann $X(q) = \sum_{i=1}^m \varphi(q_0)_i \partial_i^\varphi(r)$, was dem konstanten Vektorfeld auf $B_1(0)$ mit Wert $\varphi(q_0)$ entspricht. Per Konstruktion verschwindet X außerhalb der relativ kompakten Menge $\varphi^{-1}(B_2(0))$, hat somit kompakten Träger und erzeugt nach [Satz 7.6](#) einen globalen Fluss $\phi^X: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$. Einschränkung auf $M \times [0, 1]$ liefert eine Isotopie von M und wir behaupten, dass $\phi_1^X(p_0) = q_0$. Dazu stellen wir fest, dass für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ durch

$$\gamma: (-\epsilon, 1 + \epsilon), \quad \gamma(t) = \varphi^{-1}(t\varphi(q_0))$$

eine Integralkurve von X gegeben ist. Dies sieht man sofort aus der Kartendarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial(\varphi \circ \gamma)_i}{\partial t}(t) \partial_i^\varphi(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(t\varphi(q_0)_i)}{\partial t}(t) \partial_i^\varphi(\gamma(t)) \\ &= \sum_{i=1}^m t\varphi(q_0)_i \partial_i^\varphi(\gamma(t)) = X(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\gamma(1) = q_0$ und $\gamma(0) = \varphi^{-1}(0) = p_0$, also $\phi_1^X(p_0) = \gamma(1) = q_0$, was zu zeigen war. \square

Das Beweisschema ist typisch für die Differentialtopologie. Um eine gesuchte Isotopie zu finden, konstruiert man mit Hilfe von Abschneidefunktionen oder Zerlegungen der Eins ein geeignetes Vektorfeld und betrachtet dessen Fluss.

8 Tuben und Kragen

In diesem Kapitel lernen wir eine subtile, aber äußerst wichtige Eigenschaft differenzierbarer Untermannigfaltigkeiten kennen. Es stellt sich heraus, dass für jede Untermannigfaltigkeit $S \subset M$ eine offene Umgebung $\nu S \subset M$ und eine differenzierbare Abbildung $r: \nu S \rightarrow S$ gibt, so dass r eingeschränkt auf S die Identität auf S ist, und die Komposition $\iota \circ r$ mit der Inklusion $\iota: S \rightarrow \nu S$ homotop zur Identität auf νS ist. Etwas hochtrabender: jede differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist ein Umgebungsdeformationsretrakt. Insbesondere erhalten wir den noch ausstehenden Beweis von [Lemma 4.4](#), das wir für die Approximation stetiger Abbildungen und Homotopien benutzt hatten. Für kompaktes S ist das Paar $(\nu S, r)$ sogar eindeutig bis auf ambiente Isotopie in M . Wir betrachten zunächst den wichtigen Spezialfall, in dem S der Rand einer „Mannigfaltigkeit mit Rand“ ist. Zunächst müssen wir allerdings kurz erklären, was wir damit überhaupt meinen wollen.

8.1 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Einige Räume, denen man recht regelmäßig begegnet, wie zum Beispiel abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ oder die Einheitsbälle $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ weigern sich leider Mannigfaltigkeiten im bisherigen Sinn zu sein, obwohl sie sicherlich etwas mannigfaltigkeiten an sich haben. Das Problem sind die offensichtlichen „Randpunkte“ (in den Beispielen $\{a, b\}$ und S^{n-1}), die keine zu offenen Teilmengen des entsprechenden \mathbb{R}^n homöomorphen Umgebungen besitzen.⁸ Es ist aus vielerlei Gründen sinnvoll, die Mannigfaltigkeits Begriff ein Stück weit

⁸In dieser starken Form in dieser Aussage allerdings ähnlich nicht trivial wie die topologische Invarianz der Dimension.

zu verallgemeinern, um Räumen wie $[a, b]$ und D^n mit in die Theorie aufzunehmen. Die Verallgemeinerung läuft im wesentlichen nur darauf hinaus, die Euklidischen Räume \mathbb{R}^m als lokale Modelle durch sogenannte Halbräume zu ersetzen.

Halbräume. Unter dem m -dimensionalen **Halbraum** verstehen wir die Menge

$$\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 \leq 0\} \subset \mathbb{R}^m,$$

versehen mit der Unterraumtopologie. Wir betrachten außerdem das **Innere** und den **Rand** des Halbraums

$$\mathring{\mathbb{H}}^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 < 0\} \subset \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad \partial\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 = 0\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Dies sind auf kanonische Art und Weise differenzierbare Mannigfaltigkeiten im ursprünglichen Sinn, $\mathring{\mathbb{H}}^m$ als offene Teilmenge von \mathbb{R}^m und $\partial\mathbb{H}^m$ als linearer Unterraum von \mathbb{R}^m . Man überzeugt sich leicht, dass $\mathring{\mathbb{H}}^m$ und $\partial\mathbb{H}^m$ diffeomorph zu \mathbb{R}^m , beziehungsweise \mathbb{R}^{m-1} sind. Konkrete Diffeomorphismen sind zum Beispiel gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m &\xrightarrow{\cong} \mathring{\mathbb{H}}^m, & (x_1, \dots, x_m) &\mapsto (-e^{-x_1}, x_2, \dots, x_m) \\ \partial\mathbb{H}^m &\xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{m-1}, & (0, x_2, \dots, x_m) &\mapsto (x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{H}^m$ definieren wir analog

$$U = U \cap \mathring{\mathbb{H}}^m \quad \text{und} \quad \partial U = U \cap \partial\mathbb{H}^m.$$

Als offene Teilmengen der Mannigfaltigkeiten $\mathring{\mathbb{H}}^m$ und $\partial\mathbb{H}^m$ sind dies wieder Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $F: U \rightarrow \mathbb{H}^n$ nennen wir differenzierbar in $p \in U$ falls es für jedes $p \in U$ eine offene Umgebung $\tilde{U}_p \subset \mathbb{R}^n$ und eine differenzierbare Abbildung $\tilde{F}_p: \tilde{U}_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, die auf $\tilde{U}_p \cap U$ mit F übereinstimmt. Für $p \in \mathring{U}$ ist dies der übliche Differenzierbarkeitsbegriff. Alle relevanten Aussagen der mehrdimensionalen Differentialrechnung gelten auch im Halbraumkontext, insbesondere die Kettenregel und der Satz über lokale Invertierbarkeit. Für die Theorie der Mannigfaltigkeiten mit Rand ist außerdem folgende Aussage wichtig.

Lemma 8.1. (*Invarianz des Randes*) Seien $U, V \subset \mathbb{H}^m$ offen und $\Phi: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt $\Phi(\partial U) \subset \partial V$. Insbesondere ist die Einschränkung $\Phi|_{\partial U}: \partial U \rightarrow \partial V$ ein Diffeomorphismus.

Beweis. Die zweite Aussage folgt sofort aus der Ersten, welche äquivalent ist zu $\Phi(\mathring{U}) \subset \mathring{V}$. Um dies zu zeigen, sei $p \in \mathring{U}$ und $U_p \subset U$ eine Umgebung von p , die sowohl in U als auch in \mathbb{R}^2 offen ist. Dann ist Φ aufgefasst als Abbildung $U_p \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar im klassischen Sinn und es gilt $\det D\Phi(q) \neq 0$ für alle $q \in U_p$. Mit Satz über lokale Invertierbarkeit folgert man, dass das Bild $\Phi(U_p)$ offen in \mathbb{R}^n ist. Per Annahme gilt außerdem $\Phi(U_p) \subset V$, und die Offenheit in \mathbb{R}^2 garantiert $\Phi(U_p) \subset \mathring{V}$. Insbesondere gilt $\Phi(p) \in \mathring{V}$, was zu zeigen war. \square

Die Theorie der Mannigfaltigkeiten mit Rand. Indem wir in der bisherigen Theorie überall \mathbb{R}^m durch \mathbb{H}^m ersetzen, erhalten wir die gewünschte Verallgemeinerung.

Definition 8.2. Sei M ein topologischer Raum. Eine m -dimensionale **Karte mit Rand** von M ist ein Homöomorphismus $\varphi: U \rightarrow U'$, wobei $U \subset M$ und $U' \subset \mathbb{H}^m$ offene Teilmengen sind.

Wie zuvor nennen wir zwei Karten mit Rand $\varphi, \tilde{\varphi}$ von M **differenzierbar verträglich** falls die Kartenwechsel $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ und $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar (im obigen Sinn) sind. Mannigfaltigkeiten mit Rand sind nun völlig analog definiert wie in [Abschnitt 1.3](#).

Definition 8.3. Eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand** ein Hausdorffraum M mit abzählbarer Basis der Topologie, zusammen mit einem maximalen differenzierbaren Atlas bestehend aus Karten mit Rand. Wir definieren den **Rand** von M als

$$\begin{aligned}\partial M &= \{p \in M \mid \exists \varphi \in \mathcal{S}_p^M : \varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^m\} \\ &= \{p \in M \mid \forall \varphi \in \mathcal{S}_p^M : \varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^m\}\end{aligned}$$

wobei \mathcal{S}_p^M die Menge aller differenzierbaren Karten mit Rand um p ist und m die Dimension von M . (Die Gleichheit folgt aus [Lemma 8.1](#).)

Nahezu die gesamte Theorie, die wir bis dato entwickelt haben, überträgt sich wortwörtlich oder mit offensichtlichen Modifikationen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand. Hier eine Zusammenfassung:

- Differenzierbarkeit von Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten mit Rand wird wie gehabt über Kartendarstellungen definiert.
- Differenzierbare Zerlegungen der Eins und Abschneidefunktionen lassen sich genau so konstruieren wie in [Abschnitt 2](#).
- Die Begriffe Einbettungen, Immersionen und Untermannigfaltigkeiten definiert man völlig analog und es gelten die gleichen Zusammenhänge wie in [Abschnitt 3](#).
- Der Rangsatz, der Satz vom regulären Wert und der Satz von Sard gelten analog für Mannigfaltigkeiten mit Rand.
- Mit leichten Modifikationen der Argumente kann man Einbettungen von Mannigfaltigkeiten mit Rand in Halbräume konstruieren, mit diesen ähnliche Approximationsresultate für stetige Abbildungen und Homotopien wie in [Abschnitt 4](#) beweisen.
- Die lokale und die algebraische Beschreibung von Tangentialvektoren und Differentialen übertragen sich wortwörtlich. Die geometrische Beschreibung wird leider etwas unhandlich und muss dahingehend erweitert werden, dass man auch Kurven mit halb-offenen Definitionsbereichen $(-\epsilon, 0]$ und $[0, \epsilon)$ zulässt.
- Wie im Fall ohne Rand, definiert man Vektorfelder und Integralkurven, und erhält die Existenz maximaler Integralkurven. Letztere können nun allerdings beliebige Intervalle (offen, halboffen, abgeschlossen) als Definitionsbereich haben. Dementsprechend komplizierter werden auch die Definitionsbereiche von Flüssen.

Aufgabe 13.1. Sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Beweisen Sie die Existenz einer differenzierbaren Einbettung $f: M \hookrightarrow \mathbb{H}^{2m+1}$ mit $f(\partial M) \subset \partial \mathbb{H}^{2m+1}$ und $f(M \setminus \partial M) \subset \mathring{\mathbb{H}}^{2m+1}$.

Einige Beispiele.

- (1) Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit im Sinne von [Definition 1.8](#) ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand, da jede \mathbb{R}^m -wertige Karte durch Komposition mit einem Diffeomorphismus $\mathbb{R}^m \cong \mathring{\mathbb{H}}^m$ zu einer \mathbb{H}^m -wertigen Karte mit Rand wird.
- (2) Jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist eine eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Der Rand ∂I besteht aus den in I enthaltenen Intervallgrenzen. Zum Beispiel gilt für ein halboffenes Intervall $\partial[a, b) = \{a\}$.
- (3) Der n -dimensionale Einheitsball $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial D^n = S^{n-1}$. Ein differenzierbarer Atlas ist zum Beispiel gegeben durch

$$\{x \in D^n \mid \pm x_i < 0\} \rightarrow \mathbb{H}^n, \quad x \mapsto (\pm x_i - \sqrt{1 - |y_i|^2}, y_i),$$

wobei $y_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

- (4) Sei M eine Mannigfaltigkeit ohne Rand, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und $a \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert. Dann ist $\{f \leq a\}$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand, wie man leicht aus dem Rangsatz folgern kann.

Aufgabe 13.2. Beweisen Sie Aussage (4). Gilt sie auch falls M eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$ ist?

8.2 Kragen und Verkleben von Mannigfaltigkeiten mit Rand

Wir betrachten nun den Rand einer Mannigfaltigkeit mit Rand etwas näher. Zunächst stellen wir fest, dass der Rand selbst eine Mannigfaltigkeit (ohne Rand) ist.

Lemma 8.4. Sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist der Rand ∂M eine $(m-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand von M .

Beweis. Falls $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{H}^m$ eine Karte mit Rand ist, ist $\varphi|_{\partial U}$ eine Karte von ∂M mit Werten in $\partial\mathbb{H}^m \cong \mathbb{R}^{m-1}$, wobei die Identifikation durch die Projektion auf die letzten $(m-1)$ Koordinaten gegeben ist. Aus Lemma 8.1 folgt, dass diese Konstruktion differenzierbar verträgliche Karten auf ebensolche schickt. \square

Definition 8.5. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Ein **Kragen** von ∂M ist eine differenzierbare Einbettung $\kappa: \partial M \times [0, 1] \hookrightarrow M$, so dass $\kappa(p, 0) = p$ für alle $p \in \partial M$.

Was wir hier definiert haben, sollte man streng genommen einen *abgeschlossenen Kragen* nennen. In der Literatur sind Kragen oft als *offene* Umgebungen des Randes diffeomorph zu $\partial M \times [0, \epsilon)$ definiert. Beide Konzepte sind äquivalent. Wir wollen nun folgenden Satz beweisen.

Satz 8.6. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit kompaktem Rand.

- (i) Jede offene Umgebung von ∂M enthält einen Kragen.
- (ii) Je zwei Kragen $\kappa_0, \kappa_1: \partial M \times [0, 1] \rightarrow M$ sind ambient isotop in M , das heißt, es gibt eine Isotopie $\phi: M \times [0, 1] \rightarrow M$, so dass $\kappa_1 = \phi_1 \circ \kappa_0$.

Die Konstruktion von Kragen ist eine weitere Anwendung von Vektorfeldern und Integralkurven. Wir beschreiben zunächst die relevanten Vektorfelder.

Definition 8.7. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ ist bei $p \in \partial M$ **nach innen gerichtet**, falls es um p eine Kartendarstellung der folgenden Form besitzt:

$$X(p) = \sum_{i=1}^m X_i^\varphi(p) \partial_i^\varphi(p) \quad \text{mit} \quad X_1^\varphi(p) < 0. \quad (20)$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Bedingung (20) für alle Kartendarstellungen gilt, sobald sie für eine einzige erfüllt ist.

Lemma 8.8. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand und U eine offene Umgebung von ∂M . Dann gibt es ein überall nach innen gerichtetes Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ mit $\text{supp}(X) \subset U$.

Beweis. Sei $\{\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow U'_\alpha\}_{\alpha \in A}$ und $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Zerlegung der Eins mit $\text{supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha$ gewählt, dass jedes Kartengebiet U_α , das ∂M trifft, in U enthalten ist. Sei ∂A die Menge der $\alpha \in A$ mit $U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset$. Dann ist durch $X = \sum_{\alpha \in \partial A} -\rho_\alpha \partial_1^{\varphi_\alpha}$ Vektorfeld mit Träger in U gegeben, dass entlang ∂M überall nach innen gerichtet ist. \square

Aufgabe 13.3. Zeigen Sie, dass die Bedingung (20) wie behauptet unabhängig von der Wahl der Karte ist. Folgern Sie, dass das im Beweis von Lemma 8.8 konstruierte Vektorfeld tatsächlich überall nach innen gerichtet ist.

Beweise von Satz 8.6. Wir beschränken uns auf den Beweis von (i), der Existenz von Kragen, da es uns für die Eindeutigkeitsaussage (ii) etwas an Technik fehlt. Wir verweisen auf [Wal16, Prop. 2.5.7]. Sei $U \subset M$ eine offene Umgebung von ∂M . Durch Verkleinern können wir annehmen, dass der Abschluss \bar{U} in M kompakt ist, und dass jede Zusammenhangskomponente von \bar{U} genau eine Randkomponente von ∂M enthält. Mit Hilfe von Lemma 8.8 wählen wir ein überall nach innen gerichtetes Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ mit Träger in U . Insbesondere hat X kompakten Träger und alle maximalen Integralkurven γ_p^X mit $p \in \partial M$ sind auf $[0, \infty)$ definiert und verlaufen in U . Der Satz von Picard-Lindelöf liefert die Differenzierbarkeit der Abbildung

$$\phi: \partial M \times [0, \infty] \rightarrow M, \quad \phi(p, t) = \lambda_p^X(t).$$

Nun ist für $p \mapsto \phi(p, 0)$ für $p \in \partial M$ die Inklusionsabbildung des Randes ist, und wir haben eine kanonische Spaltung

$$T_p M \cong T_p \partial M \oplus \mathbb{R}X(p)$$

Es folgt, dass das Differential von Φ bei $(p, 0)$ für alle $p \in \partial M$ ein Isomorphismus ist. Insbesondere ist die Einschränkung von ϕ auf $\partial M \times [0, \epsilon]$ für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ eine Einbettung. Durch Reskalieren erhalten wir einen Kragen

$$\kappa: \partial M \times [0, 1] \rightarrow M, \quad \kappa(p, t) = \phi(p, \epsilon t) = \lambda_p^X(\epsilon t). \quad \square$$

Bemerkung. (i) Falls ∂M nicht kompakt ist, liefert eine leichte Modifikation des obigen Arguments ebenfalls die Existenz von Kragen. Bei der Eindeutigkeit muss man allerdings gewisse Abstriche machen.

(ii) Falls der Rand mehrere Zusammenhangskomponenten hat, kann man selbstverständlich auch Kragen für einzelne Randkomponenten betrachten.

Anwendung: Verkleben von Mannigfaltigkeiten mit Rand. Eine der Hauptanwendungen von Kragen ist das Verkleben zweier Mannigfaltigkeiten mit Rand. Wir betrachten folgende Ausgangssituation. Gegeben seien:

- differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand M_1 und M_2 ,
- kompakte Randkomponenten $Q_1 \subset \partial M_1$ und $Q_2 \subset \partial M_2$ und
- ein Diffeomorphismus $\tau: Q_1 \xrightarrow{\cong} Q_2$

Unter der **Verklebung** von M_1 und M_2 entlang τ versteht man den Quotientenraum

$$M_1 \cup_\tau M_2 = (M_1 \amalg M_2) / p \sim \tau(p) \text{ für alle } p \in Q_1.$$

Routineverifikationen zeigen, dass $M_1 \cup_\tau M_2$ ein Hausdorff Raum mit abzählbarer Basis ist, und dass die Quotientenabbildung $q: M_1 \amalg M_2 \rightarrow M_1 \cup_\tau M_2$ eingeschränkt auf M_1 und M_2 jeweils eine topologische Einbettung ist. Das Bild der identifizierten Randkomponenten bezeichnen wir mit $Q = q(Q_1) = q(Q_2)$.

Selbstverständlich hätten wir gerne, dass $M_1 \cup_\tau M_2$ wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (ggf. mit Rand) ist, so dass M_1 und M_2 Untermannigfaltigkeiten mit Rand sind. Dazu brauchen wir einen differenzierbaren Atlas von $M_1 \cup_\tau M_2$. Innerhalb der offenen Teilmengen $q(M_1 \setminus Q_1)$ und $q(M_2 \setminus Q_2)$ erhalten wir Karten (mit Rand) durch Komposition ebensolcher von M_1 und M_2 mit q^{-1} . An der Nahtstelle Q ist die Situation allerdings weniger klar. Man könnte naiv versuchen, \mathbb{H}^m -wertige Karten mit Rand um Punkte $p \in Q_1$ und $\tau(p) \in Q_2$ zu einer \mathbb{R}^m -wertigen Karte um $q(p) = q(\tau(p)) \in Q$ zusammen zu setzen. Bei genauerer Betrachtung stellt man allerdings schnell fest, dass die Existenz hinreichend kompatibler Karten nicht ohne weiteres gegeben ist. An dieser Stelle kommen Kragen ins

Spiel, die letztendlich genau diese Probleme global für ganz Q lösen. Wählen wir nämlich Kragen $\kappa_i: Q_i \times [0, 1]$, so ist durch

$$\kappa Q_1 \times (-1, 1) \longrightarrow M_1 \cup_\tau M_2, \kappa(p, t) = \begin{cases} \kappa_1(p, -t), & t \leq 0 \\ \kappa_2(\tau(p), t) & t \geq 0 \end{cases}$$

eine topologische Einbettung gegeben.

Aufgabe 13.4. Beweisen Sie diese Behauptung.

Das Bild von κ ist eine offene Umgebung von Q in $M_1 \cup_\tau M_2$ und der Quellraum $Q_1 \times (-1, 1)$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand). Wir können also κ benutzen, um Karten von $M_1 \cup_\tau M_2$ nahe Q zu erhalten. Da die Kragenabbildungen κ_1 und κ_2 differenzierbare Einbettungen sind, sind die auf $q(M_1 \setminus Q_1)$, $q(M_2 \setminus Q_2)$ und $\kappa(Q_1 \times (-1, 1))$ konstruierten Karten differenzierbar verträglich. Man überzeugt sich leicht, dass bezüglich dieser differenzierbaren Struktur die Einschränkungen von q auf M_1 und M_2 differenzierbare Einbettungen sind, so dass wir M_1 und M_2 kanonisch als Untermannigfaltigkeiten von $M_1 \cup_\tau M_2$ auffassen können.

Schließlich stellt sich noch die Frage, in wie fern die differenzierbare Struktur von der Wahl der Kragen abhängen kann. Sei $\kappa'_i: Q_i \times [0, 1] \rightarrow M_i$ für $i = 1, 2$ ein weiteres Paar von Kragen und $\kappa': Q_1 \times (-1, 1) \rightarrow M_1 \cup_\tau M_2$ die entsprechende Einbettung. Seien \mathcal{S} und \mathcal{S}' die differenzierbaren Strukturen auf $M_1 \cup_\tau M_2$, die wie oben mit Hilfe von κ und κ' definiert sind. Per Definition ist die Komposition

$$\kappa' \circ \kappa^{-1}: \kappa(Q_1 \times (-1, 1)) \longrightarrow \kappa'(Q_1 \times (-1, 1)) \quad (21)$$

ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen von $(M_1 \cup_\tau M_2, \mathcal{S})$ und $(M_1 \cup_\tau M_2, \mathcal{S}')$. Da die Randkomponenten Q_1 und Q_2 per Annahme kompakt sind, liefert [Satz 8.6\(ii\)](#) Diffeomorphismen $\phi_i \in \text{Diff}(M_i)$ mit $\kappa'_i = \phi_i \circ \kappa_i$. Diese setzen sich via

$$\phi_1 \cup_\tau \phi_2: M_1 \cup_\tau M_2 \longrightarrow M_1 \cup_\tau M_2, \quad \phi_1 \cup_\tau \phi_2(p) = \begin{cases} \phi_1(q^{-1}(p)), & p \in q(M_1 \setminus Q_1) \\ p, & p \in Q \\ \phi_2(q^{-1}(p)), & p \in q(M_2 \setminus Q_2) \end{cases}$$

zu einem Diffeomorphismus zusammen, der [\(21\)](#) fortsetzt. Wir haben somit gezeigt:

Satz 8.9 (Verklebungssatz). *Seien M_1, M_2 Mannigfaltigkeiten mit Rand und $\tau: Q_1 \xrightarrow{\cong} Q_2$ ein Diffeomorphismus zwischen kompakten Randkomponenten $Q_1 \subset \partial M_1$ und $Q_2 \subset \partial M_2$.*

- (i) *Die Verklebung $M_1 \cup_\tau M_2$ besitzt eine Struktur als differenzierbare Mannigfaltigkeit (eventuell mit Rand), so dass die kanonischen Inklusionen von M_1 und M_2 differenzierbare Einbettungen sind.*
- (ii) *Die differenzierbare Struktur ist eindeutig bis auf Diffeomorphismus.*

8.3 Normalenbündel und Tubenumgebungen

20.1.2020

Wir kommen nun zu dem unscheinbaren, aber äußerst nützlichen Konzept von Tubenumgebungen. Dies sind spezielle Arten von Umgebungen von Untermannigfaltigkeiten innerhalb einer umgebenden Mannigfaltigkeit. Im Fall einer eingebetteten Kurve in \mathbb{R}^3 kann man sich eine Tubenumgebung als Schlauch vorstellen, der um die Kurve liegt. Allerdings haben Tubenumgebungen mehr Struktur. Ein systematischer Zugang zu diesem Themengebiet erfordert etwas Vorwissen über Vektorbündel und elementare Riemannsche Geometrie, das uns nicht zur Verfügung steht. Wir folgen daher der ad hoc Darstellung in [\[Bre93, Ch. II.11\]](#). Außerdem beschränken wir uns der Kürze halber auf kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand. Für alles weitere sei zum Beispiel auf [\[BJ82, Ch. 12\]](#) oder [\[Wal16, Ch. 2\]](#) verwiesen.

Normalenbündel. Wir betrachten zunächst den Spezialfall einer m -dimensionalen Untermannigfaltigkeit M von \mathbb{R}^n . Wie üblich identifizieren wir die Tangentialräume an M mit Untervektorräumen von \mathbb{R}^n und definieren den **Normalenraum** an $p \in M$ als

$$N_p(M, \mathbb{R}^n) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \perp T_p M\}.$$

Die Menge aller Normalenräume lässt sich zu dem **Normalenbündel** zusammenfassen

$$N(M, \mathbb{R}^n) = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \perp T_p M\}.$$

Ähnlich wie das Tangentialbündel kommt das Normalenbündel zusammen mit einer Projektion

$$\pi: N(M) \longrightarrow M, \quad (p, v) \mapsto p.$$

Für $p \in M$ können wir das Urbild $\pi^{-1}(p)$ kanonisch mit $N_p(M, \mathbb{R}^n)$ identifizieren. Es ist wichtig, im Hinterkopf zu behalten, dass das Normalenbündel nicht nur von der abstrakten Mannigfaltigkeit M abhängt sondern der auch von der konkreten Einbettung in \mathbb{R}^n .

Nun sei $S \subset M$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit einer beliebigen m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . In diesem Fall wählen wir eine Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ und definieren das Normalenbündel als

$$N(S, M) = \{(p, v) \in S \times \mathbb{R}^n \mid v \in T_p M, v \perp T_p S\}.$$

Wieder ist eine Projektion $\pi: N(S, M) \rightarrow S$ durch $\pi(p, v) = p$ gegeben.

Lemma 8.10. *Sei $S \subset M \subset \mathbb{R}^n$ wie zuvor. Das Normalenbündel eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{2n} . Die Projektion $\pi: N(S, M) \rightarrow S$ ist differenzierbar.*

Beweis. Mit den üblichen Argumenten können wir Karten $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ von \mathbb{R}^n konstruieren, die gleichzeitig zu M und S adaptiert sind, das heißt, es gelten $\varphi(M \cap U) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}$ und $\varphi(S \cap U) \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. In Komponenten $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ geschrieben bedeutet dies, dass durch

$$\begin{aligned} \varphi_M &= (\varphi_1, \dots, \varphi_m): M \cap U \longrightarrow \varphi_M(M \cap U) \subset \mathbb{R}^m \quad \text{und} \\ \varphi_S &= (\varphi_1, \dots, \varphi_k): M \cap U \longrightarrow \varphi_S(S \cap U) \subset \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

Karten gegeben sind von M und S gegeben sind. Da φ ein Diffeomorphismus ist, ist für jeden Punkt $p \in U$ durch die Gradienten $\nabla \varphi_1(p), \dots, \nabla \varphi_n(p)$ eine Basis von \mathbb{R}^n gegeben. Jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^n \cong T_p \mathbb{R}^n$ lässt sich also eindeutig schreiben als

$$v = \sum_{i=1}^n \xi^{\varphi}(p, v) \nabla \varphi_i(p)$$

und die Koordinatenfunktionen $\xi_i^{\varphi}: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind differenzierbar in beiden Einträgen. Durch $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \xi_1^{\varphi}, \dots, \xi_n^{\varphi}): U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist dann eine Karte von \mathbb{R}^{2n} gegeben. Man überzeugt sich leicht, dass durch

$$\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k, \xi_{k+1}^{\varphi}, \dots, \xi_m^{\varphi}): \pi^{-1}(S \cap U) \longrightarrow \varphi_S(S \cap U)$$

eine Karte von $N(S, M)$ gegeben ist, dass die so konstruierten Karten einen differenzierbaren Atlas von $N(S, M)$ bilden, und dass die Projektion π die Kartendarstellung

$$\varphi_S \circ \pi \circ \Phi^{-1}(u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_m) = (u_1, \dots, u_k)$$

hat, die offensichtlich differenzierbar ist. □

Bemerkung. (i) Definiert man in der Notation des obigen Beweises $\Xi: \pi^{-1}(U \cap S) \rightarrow U \cap S$ durch $\Xi(p, v) = (p, \xi_{k+1}^v, \dots, \xi_m^v)$, so erhält man eine differenzierbare Abbildungen, die für festes p linear Isomorphismen $N_p(S, M) \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$ liefern. Dies gibt $N(S, M)$ die Struktur eines differenzierbaren, reellen Vektorbündel über S .

(ii) Man kann zeigen, dass $N(S, M)$ zwar von der Einbettung $S \hookrightarrow M$, nicht aber von der gewählten Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Dazu benutzt man die kanonischen Isomorphismen

$$N_p(S, M) \cong T_p M / T_p S,$$

die durch die Einbettungen $S \subset M \subset \mathbb{R}^n$ und die Quotientenabbildungen $T_p M \mapsto T_p M / T_p S$. Der Übergang zu den Quotienten eliminiert dabei die potentielle Abhängigkeit von der zusätzlich gewählten Einbettung. Dies führt letztendlich zu einer intrinsischen Konstruktion des Normalbündels $N(S, M)$ als „Quotientenbündel“ $N(S, M) = TM|_S / TS$. Dieser Zugang ist zum Beispiel in [BJ82, Chs. 3&4] nachzulesen.

Tubenumgebungen. Sei wie gehabt $S \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit mit Normalenbündel $N(S, M)$, dass mit Hilfe einer Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ beschrieben ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass weder S noch M einen Rand haben. Zusätzlich zu der Projektion $\pi: N(S, M) \rightarrow S$ haben wir auch wieder einen **Nullschnitt** $z: S \rightarrow N(S, M)$, der einen Punkt $p \in S$ auf $(p, 0) \in N_p(S, M)$ schickt. Der Nullschnitt stellt eine kanonische Einbettung von S in $N(S, M)$ dar und wird häufig mit seinem Bild $z(S)$ identifiziert, das wiederum mit S selbst identifiziert wird. Wir betrachten folgende abgeschlossenen Umgebungen des Nullschnitts

$$N(S, M; r) = \{(p, v) \in N(S, M) \mid |v| \leq r\}, \quad r > 0,$$

die man auch das **normale Scheibenbündel** mit Radius r von S in M nennt. Dieses stellt einer differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand dar. Unter einer **Tubenumgebung** wollen wir eine abgeschlossene Umgebung $\nu(S, M) \subset M$ von S verstehen, die das Bild einer Einbettung

$$\tau: N(S, M; 1) \longrightarrow M$$

des normalen Scheibenbündels mit Radius 1 ist, deren Komposition mit dem Nullschnitt $\tau \circ z$ die Inklusion $\iota_S: S \hookrightarrow M$ ergibt. Die Komposition $r = \pi \circ \tau^{-1}: \nu(S, M) \rightarrow S$ heißt die **normale Retraktion** von ν . Die Einbettung τ nennen wir eine **parametrisierte Tubenumgebung**. Allgemein gilt folgende Aussage, die man als Analogon von Satz 8.6 verstehen kann:

Satz 8.11 (Tubenumgebungen). *Für jede Untermannigfaltigkeit $S \subset M$ existiert eine Tubenumgebung. Falls S kompakt ist, sind je zwei parametrisierte Tubenumgebungen τ_0 und τ_1 ambient isotop in M .*

Um die Eindeutigkeitsaussage zu beweisen fehlt uns wie im Fall von Kragen ein technisches Hilfsmittel. Wir beschränken uns daher auf die Existenz von Tubenumgebungen und zeigen diese auch nur im Fall, dass sowohl S als auch M kompakt sind. Das Hauptwerkzeug sind Einbettungen in Euklidische Räume und die zentrale Idee ist in Lemma 8.13 enthalten.

Bevor wir in den Beweis einsteigen halten wir noch einen nützlichen Fakt über Tangentialräume an Punkten des Nullschnitts in $N(S, M)$ fest. Die etwas aufwendig anmutende Argumentation hat den Vorteil, dass sie sich direkt auf allgemeine Vektorbündel übertragen lässt.

Lemma 8.12. *Sei $S \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit und $p \in S$. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$T_{(p,0)}N(S, M) \cong T_p S \oplus N_p(S, M).$$

Beweis. Wir halten zunächst fest, dass das Differential der Projektion $\pi: N(S, M) \rightarrow S$ an jedem Punkt surjektiv ist, was zum Beispiel aus den Kartendarstellungen ersichtlich ist. Die Normalenräume $N_p(S, M) \cong \pi^{-1}(p)$ sind also Urbilder regulärer Werte und der Satz vom regulären Wert identifiziert die Tangentialräume $T_p N_p(S, M)$ mit dem Kern von $d_{p,v}\pi$. Die Vektorraumstruktur liefert eine weitere Identifikation $N_p(S, M) \cong T_p N_p(S, M)$. Im Fall von Punkten $z(p) = (p, 0)$ im Bild des Nullschnitts erhalten wir eine kanonische gespaltene exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N_p(S, M) \longrightarrow T_{(p,0)}N(S, M) \xrightarrow{d_{(p,0)}\pi} T_p S \longrightarrow 0,$$

$\longleftarrow d_p z$

die den gewünschten kanonischen Isomorphismus liefert. □

Wir wenden uns nun der Konstruktion von Tubenumgebungen zu.

Lemma 8.13. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit. Die Einschränkung der Abbildung*

$$\theta: N(M, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \theta(p, v) = p + v$$

auf $N(M, \mathbb{R}^n; \epsilon)$ ist für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ eine differenzierbare Einbettung. Insbesondere ist durch

$$\tau: N(M, \mathbb{R}^n; 1) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \tau(p, v) = \theta(p, \epsilon v)$$

eine parametrisierte Tubenumgebung von M in \mathbb{R}^n gegeben.

Beweis. Der Zusatz folgt offensichtlich aus der ersten Aussage. Da M und somit auch $N(M, \mathbb{R}^n; \epsilon)$ kompakt ist, genügt es, zu zeigen, dass die entsprechende Einschränkung von θ für kleines ϵ eine injektive Immersion ist.

- (1) Das Differential $d_{(0,p)}\theta: T_{(p,0)}N(M, \mathbb{R}^n) \rightarrow T_p \mathbb{R}^n$ ist für alle $p \in M$ ein Isomorphismus.
- (2) θ ist für kleines ϵ injektiv auf $N(M, \mathbb{R}^n; \epsilon)$.

Behauptung (1) folgt aus der Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} T_{(p,0)}N(M, \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{d_{(0,p)}\theta} & T_p \mathbb{R}^n \\ \cong \uparrow & & \cong \uparrow \\ T_p S \oplus N_p(M, \mathbb{R}^n) & \xrightarrow[(v,w) \mapsto v+w]{\cong} & \mathbb{R}^n \end{array} \quad (22)$$

Hierbei sind die vertikalen Pfeile die kanonischen Isomorphismen aus [Lemma 8.12](#) und die üblichen Identifikationen der Tangentialräume von Vektorräumen. Der untere Pfeil ist per Definition von $N_p(M, \mathbb{R}^n)$ ein Isomorphismus. Der Nachweis der Kommutativität des Diagramms ist eine instruktive Übung für den Umgang mit Tangentialräumen und Differentialen. Ergo:

Aufgabe 14.1. Zeigen Sie, dass das Diagramm (22) kommutiert.

Um (2) zu zeigen, folgern wir zunächst aus (1), dass θ für ein $\delta > 0$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, also insbesondere in der Nähe eines jeden Punktes injektiv ist. Wir nehmen nun an, dass θ für kein $\epsilon \leq \delta$ global injektiv ist. Dann finden wir Folgen $(p_i, v_i) \neq (q_i, w_i)$ in $N(M, \mathbb{R}^n)$ mit $\theta(p_i, v_i) = \theta(q_i, w_i)$ und $|v_i| \rightarrow 0$ und $|w_i| \rightarrow 0$. Da M eine kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^n ist, können wir (eventuell nach Übergang zu Teilfolgen und Ummummierung) annehmen, dass die Folgen p_i und q_i in M gegen $p, q \in M$ konvergieren. Mit der Stetigkeit von θ erhalten wir

$$p = \theta(p, 0) = \lim \theta(p_i, v_i) = \lim \theta(q_i, w_i) = \theta(q, 0) = q.$$

Insbesondere sind (p_i, v_i) und (q_i, w_i) für großes i beliebig nah an $(p, 0)$. Wie bereits bemerkt, ist θ allerdings in einer Umgebung von $(p, 0)$ injektiv. Dies widerspricht allerdings $(p_i, v_i) \neq (q_i, w_i)$ und $\theta(p_i, v_i) = \theta(q_i, w_i)$. \square

Beweis von Satz 8.11 (Existenzaussage). Seien $S \subset M \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Untermannigfaltigkeiten und sei $\nu(M, \mathbb{R}^n)$ eine Tubenumgebung von M in \mathbb{R}^n mit normaler Retraktion $r: \nu(M, \mathbb{R}^n) \rightarrow M$; deren Existenz ist durch Lemma 8.13 gesichert. Für $\epsilon > 0$ betrachten ähnliche Abbildungen wie zuvor

$$\theta_0: N(S, M; \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

und halten fest, dass θ_0 für kleines ϵ Werte im inneren von $\nu(M, \mathbb{R}^n)$ annimmt. In diesem Fall können wir die Komposition

$$\theta = r \circ \theta_0: N(S, M; \epsilon) \rightarrow M$$

betrachten. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 8.13 überlegt man sich, dass das Differential von θ in allen Punkten der Form $(p, 0)$ ein Isomorphismus ist. Dazu ist die Beobachtung nötig, dass das Differential von r nur Normalenvektoren zu N im Kern hat, die in der Definition von $N(S, M)$ ausgeschlossen werden. Von hier an überträgt sich der Beweis von Lemma 8.13 wortwörtlich und liefert, dass θ für hinreichend kleines ϵ eine Einbettung ist. Durch Reskalieren erhält man wieder eine parametrisierte Tubenumgebung $\tau(p, v) = \theta(p, \epsilon v)$. \square

Bemerkung. (i) Die Kompaktheit von S und M taucht zwar an diversen Stellen in den Beweisen auf, spielt aber letztendlich keine wesentliche Rolle. Ersetzt man in den Definitionen von $N(M, \mathbb{R}^n; \epsilon)$ und $N(S, M; \epsilon)$ das konstante ϵ jeweils durch positive Funktionen auf M oder S , so lassen sich die Argumente modifizieren, um ohne Kompaktheitsannahmen auszukommen. Für viele Anwendungen in der Topologie ist der kompakte Fall aber bereits ausreichend.

(ii) Als Konsequenz von Satz 8.11 erhalten wir direkt Lemma 4.4, dass wir bei der differenzierbaren Approximation stetiger Abbildungen und Homotopien benutzt hatten. Somit haben wir nun auch den Approximationssatz 4.6 zumindest im kompakten Fall vollständig bewiesen.

9 Der Satz von Hopf und die Pontryagin Konstruktion

In der verbleibenden Zeit wollen wir folgenden Satz beweisen.

Satz 9.1 (Hopf). *Sei M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand. Ferner sei M kompakt, orientiert und es gelte $m \geq 1$. Dann ist der Abbildungsgrad*

$$\deg: [M, S^m] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

eine Bijektion. Insbesondere gilt $\pi_m(S^m) \cong \mathbb{Z}$ für $m \geq 1$.

Zuerst müssen wir allerdings erklären, was die Begriffe „orientiert“ und „Abbildungsgrad“ bedeuten. Wir folgen dabei der Darstellung in [Mil65], deren Lektüre wärmsten empfohlen ist.

9.1 Orientierungen und der Abbildungsgrad

Definition 9.2. Sei V ein endlich dimensionaler \mathbb{R} Vektorraum. Eine **Orientierung** von V ist eine Äquivalenzklasse $\mathfrak{o} = [b_1, \dots, b_n]$ von geordneten Basen von V , wobei (b_1, \dots, b_n) und (b'_1, \dots, b'_n) äquivalent sind falls $b'_i = \sum_j a_{ij} b_j$ mit $\det(a_{ij}) > 0$. Das Paar (V, \mathfrak{o}) nennen wir einen **orientierten Vektorraum** und jede geordnete Basis (b_1, \dots, b_n) mit $\mathfrak{o} = [b_1, \dots, b_n]$ eine **orientierte Basis** bezüglich \mathfrak{o} . Für den Euklidischen Raum \mathbb{R}^n verwenden wir die **Standardorientierung** $\mathfrak{o}_{st} = [e_1, \dots, e_n]$.

Ist $\mathfrak{o} = [b_1, \dots, b_n]$ eine Orientierung von M , so nennen wir $-\mathfrak{o} = [-b_1, b_2, \dots, b_n]$ die **umgekehrte Orientierung**. Offensichtlich sind \mathfrak{o} und $-\mathfrak{o}$ verschiedene Orientierungen und jede andere Orientierung stimmt mit einer von beiden überein. Jeder Vektorraum hat also genau zwei Orientierungen. Falls $T: V \rightarrow W$ ein linearer Isomorphismus ist und $\mathfrak{o} = [b_1, \dots, b_n]$ eine Orientierung von V ist durch $T(\mathfrak{o}) = [Tb_1, \dots, Tb_n]$ eine Orientierung von W gegeben.

Definition 9.3. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (mit Rand).

- (a) Eine **Orientierung von M** ist eine Familie $\mathfrak{o} = \{\mathfrak{o}_p\}_{p \in M}$ von Orientierungen \mathfrak{o}_p der Tangentialräume $T_p M$, so dass es einen differenzierbaren Atlas bestehend aus Karten $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ (bzw. \mathbb{H}^m) gibt, so dass die linearen Isomorphismen

$$d_p \varphi: T_p M \longrightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m, \quad p \in U$$

jeweils die Orientierung \mathfrak{o}_p von $T_p M$ in die Standardorientierung von \mathbb{R}^m überführen.

- (b) M heißt *orientierbar* falls eine Orientierung existiert. In dem Fall heißt (M, \mathfrak{o}) eine **orientierte Mannigfaltigkeit**. In der Regel wird die Orientierung allerdings nicht explizit angegeben.

Offensichtlich liefert die Standardorientierung von \mathbb{R}^n als Vektorraum über die kanonischen Isomorphismen $T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ eine Orientierung von \mathbb{R}^n als Mannigfaltigkeit. Folglich ist \mathbb{R}^n als Mannigfaltigkeit orientierbar und das selbe gilt für jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und allgemeiner für jede n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Insbesondere ist die Einheitscheibe $D^n \subset \mathbb{R}^n$ orientierbar und durch die Standardorientierung von \mathbb{R}^n kanonisch orientiert. Es stellt sich allerdings heraus, dass nicht jede Mannigfaltigkeit orientierbar ist. Die einfachsten Beispiele sind die projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ und das Möbiusband. Allerdings ist es mit der gegebenen Definition etwas trickreich die Nichtorientierbarkeit nachzuweisen.

Aufgabe 14.2. Zeigen Sie, dass jede zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeit genau zwei Orientierungen hat.

Orientierbarkeit bleibt erhalten unter Produktbildung und Übergang zum Rand, wie folgende Konstruktionen zeigen:

- Seien (M, \mathfrak{o}_M) und (N, \mathfrak{o}_N) zwei orientierte Mannigfaltigkeiten, von denen eine nicht leeren Rand haben darf. Dann ist das Produkt $M \times N$ orientierbar und die **Produktorientierung** $\mathfrak{o}_M \times \mathfrak{o}_N$ ist definiert als

$$(\mathfrak{o}_M \times \mathfrak{o}_N)_{(p,q)} = [v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n]$$

wobei $v_1, \dots, v_m \in T_p M$ und $w_1, \dots, w_n \in T_q N$ orientierte Basen sind. Hierbei identifizieren wir $T_{(p,q)} M \times N$ mit dem Produkt $T_p M \times T_q N$.

- Sei (M, \mathfrak{o}) eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist der Rand ∂M orientierbar und wir definieren die **Randorientierung** $\partial \mathfrak{o}$ über die „nach außen zuerst“ *Konvention*: für $p \in \partial M$ wählen wir einen nach außen gerichteten Tangentialvektor $v_1 \in T_p M$, eine Basis $v_2, \dots, v_m \in T_p \partial M$, so dass v_1, v_2, \dots, v_m eine orientierte Basis von $T_p M$ bilden, und definieren

$$(\partial \mathfrak{o})_p = [v_2, \dots, v_m].$$

Der Nachweis, dass dies eine wohldefinierte Orientierung liefert erfordert zwar den ein oder anderen Schritt, ist aber im wesentlichen trivial.

Insbesondere können wir das Produkt $M \times [0, 1]$ für jede orientierte Mannigfaltigkeit M wieder als orientierte Mannigfaltigkeit auffassen, und wir erhalten eine Orientierung von S^n als Rand von D^{n+1} .

Der Abbildungsgrad. Im Folgendem seien M, N orientierte Mannigfaltigkeiten derselben Dimension ohne Rand. Ferner sei M kompakt und N zusammenhängend.

Definition 9.4. Für eine differenzierbare Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist der **Abbildungsgrad** definiert durch

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{sign}(d_p f),$$

wobei $q \in N$ ein regulärer Wert von f ist und $\text{sign}(d_p f) = 1$ falls der lineare Isomorphismus $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ orientierungserhaltend ist, und andernfalls $\text{sign}(d_p f) = -1$.

Der Abbildungsgrad ist also eine mit Vorzeichen gewichtete Zählung der Urbilder eines regulären Wertes. A priori könnte der Abbildungsgrad von der Wahl des regulären Wertes abhängen. Es gilt allerdings folgender Satz.

Satz 9.5. *Der Abbildungsgrad ist wohldefiniert, das heißt, der Wert ist unabhängig von der Wahl des regulären Wertes. Ferner haben differenzierbar homotope Abbildungen $f, g: M \rightarrow N$ denselben Abbildungsgrad $\deg(f) = \deg(g)$.*

Für den Beweis fehlt uns leider die Zeit. Wir werden im nächsten Kapitel allerdings den Spezialfall $N = S^n$ ausführlich betrachten. Für den allgemeinen Fall sei auf [Mil65, §§4-5] verwiesen.

Beispiel. (1) Die Abbildung $S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^m$, gegeben durch komplexe Potenzen hat Grad m . Hierbei ist $m \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl.

(2) Falls $f: M \rightarrow N$ nicht surjektiv ist, gilt $\deg(f) = 0$, da jedes $q \in N \setminus f(M)$ ein regulärer Wert ist. Insbesondere haben konstante Abbildungen Grad 0 falls N mindestens zwei Punkte enthält.

(3) Diffeomorphismen $f: M \rightarrow N$ haben Abbildungsgrad ± 1 , je nachdem ob $d_p f$ für ein (und damit für alle) $p \in M$ orientierungserhaltend ist oder nicht.

Aufgabe 14.3. Konstruieren Sie für $n \geq 1$ Abbildungen $S^n \rightarrow S^n$ mit beliebigem ganzzahligen Grad.

A Grundbegriffe der Topologie

In diesem Anhang sammeln wir kommentarlos einige Begriffe aus der Topologie, die im Verlauf der Vorlesung auftauchen werden. Für alles weitere sei auf [Bre93] verwiesen.

Ein Basisvokabular

Definition A.1. Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, \mathcal{T}) bestehend aus einer Menge X und einer Menge \mathcal{T} von Teilmengen von X , genannt **offene Mengen**, so dass

- (1) X und \emptyset offen sind ,
- (2) beliebige Vereinigungen offener Mengen offen sind und
- (3) endliche Schnitte offener Mengen offen sind.

Eine solches Mengensystem \mathcal{T} nennt man eine **Topologie** auf X . Die Komplemente offener Mengen heißen **abgeschlossen**. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ heißt **Basis der Topologie** wenn jede offene Menge sich als Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} darstellen lässt. Der Einfachheit halber spricht man meist nur von einem "*topologischen Raum* X " ohne die Topologie explizit zu benennen.

Definition A.2. Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt **stetig** wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

Definition A.3. Seien $A \subset N \subset X$ eine Teilmengen eines topologischen Raums X . Dann heißt N **Umgebung** von A falls es eine offene Menge $U \subset X$ mit $A \subset U \subset N$ gibt. Falls N selbst offen ist, spricht man von einer **offenen Umgebung**.

Definition A.4. Sei X ein topologischer Raum und A eine Teilmenge. Der **Abschluss** \bar{A} ist der Durchschnitt aller abgeschlossener Mengen, die A enthalten. Das **Innere** $\overset{\circ}{A}$ ist die Vereinigung aller offenen Mengen, die in A enthalten sind. Der **Rand** von A ist gegeben durch $\text{rd}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Falls $\bar{A} = X$ heißt A **dicht** in X , falls $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ heißt A **nirgends dicht**.

Definition A.5. Eine System $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von Teilmengen $U_\alpha \subset X$, für das $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ gilt, heißt **Überdeckung** von X . Hierbei kann die Indexmenge A beliebig sein. Falls A endlich ist spricht man von einer **endlichen Überdeckung** und falls alle U_α offen sind von einer **offenen Überdeckung**. Schließlich heißt \mathcal{U} **lokal endlich** falls jeder Punkt in X eine Umgebung besitzt, die nur endlich viele U_α schneidet. Ist $A' \subset A$ eine Teilmenge, so dass ebenfalls $X = \bigcup_{\alpha \in A'} U_\alpha$ gilt, so nennt man $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ eine **Teilüberdeckung** von \mathcal{U} . Eine Überdeckung $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ heißt **Verfeinerung** von \mathcal{U} wenn es für jedes $\beta \in B$ ein $\alpha \in A$ gibt, so dass $V_\beta \subset U_\alpha$.

Einige Konstruktionen von Topologien

Definition A.6. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $x \in X$ und $\epsilon > 0$ ist

$$B_\epsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

der **metrische Ball** um x mit Radius ϵ . Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt d -**offen** falls es für jeder $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \subset U$. Die d -**offenen** Mengen bilden die **metrische Topologie** auf X .

Definition A.7. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Die **Unterraumtopologie** auf A ist gegeben durch die Mengen der Form $A \cap U$ mit $U \subset X$ offen.

Definition A.8. Seien X und Y topologische Räume. Die **Produkttopologie** auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ ist die kleinste Topologie, die alle Mengen der Form $U \times V$ enthält wobei $U \subset X$ und $V \subset Y$ offen sind.

Definition A.9. Sei X ein topologischer Raum, Y eine Menge und $q: X \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Wir erhalten die **Quotiententopologie** auf Y , indem wir eine Teilmenge $V \subset Y$ für offen erklären falls ihr Urbild $q^{-1}(V)$ offen in X ist.

Einige Eigenschaften von Räumen

Sei X ein topologischer Raum.

Definition A.10. X heißt **Hausdorff Raum** falls für alle Paare verschiedener Punkte disjunkte offene Umgebungen existieren.

Definition A.11. X heißt **kompakt** wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält. X heißt **lokal kompakt** wenn jeder Punkt eine kompakte **Umgebung** besitzt.

Definition A.12. X heißt **parakompakt** wenn jede offene Überdeckung von X eine lokal endliche Verfeinerung besitzt.

Definition A.13. X heißt **zusammenhängend**, wenn X nicht die disjunkte Vereinigung nicht leerer, offener Teilmengen ist. X heißt **wegzusammenhängend** falls es für je zwei Punkte $p, q \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ gibt, so dass $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$. Allgemein zerfällt jeder Raum in eine disjunkte Vereinigung maximaler (weg-)zusammenhängender Teilraum, die **(Weg-)Zusammenhangskomponenten** heißen. Für topologische und differenzierbare Mannigfaltigkeiten stimmen beide Begriffe überein.

Einige Eigenschaften stetiger Abbildungen

Definition A.14. Eine bijektive stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt **Homöomorphismus** falls die Umkehrabbildung $f^{-1}: Y \rightarrow X$ ebenfalls stetig ist. Falls solch ein Homöomorphismus existiert nennen wir X und Y **homöomorph**.

Definition A.15. Eine **Einbettung** ist eine injektive stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, die X homöomorph auf $f(X) \subset Y$ versehen mit der Unterraumtopologie abbildet.

Definition A.16. Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt...

- (a) ... **offen** falls die Bilder offener Mengen offen sind.
- (b) ... **abgeschlossen** falls die Bilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.
- (c) ... **eigentlich** falls die Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.

B Erinnerungen an Analysis

Differentialrechnung in \mathbb{R}^n

Differenzierbarkeit und Ableitungen

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Eine Abbildung $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **differenzierbar** in einem Punkt $p \in U$ falls es eine lineare Abbildung $DF(p): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, so dass für alle $0 \neq v \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(p + tv) - F(p) - tDF(p)v}{|t|} = 0.$$

Die Abbildung $DF(p)$ ist dann eindeutig bestimmt und heißt **Ableitung** von f in p . Ferner stimmt $DF(p)v$ mit der **Richtungsableitung**

$$DF(p)v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(p + tv)$$

überein. Für einen Standardbasisvektor $v = e_i$ erhalten wir die **partiellen Ableitungen**

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = DF(p)e_i = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(p + te_i).$$

Folglich wird $DF(p)$ bezüglich der Standardbasen von \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n dargestellt durch die **Jacobi Matrix** $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)$. Falls die Ableitung in jedem Punkt von U existiert heißt f schlicht differenzierbar. In dem Fall heißt die Abbildung

$$DF: U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{mn}, \quad p \mapsto DF(p)$$

die Ableitung von F . Falls DF zusätzlich stetig ist heißt F **stetig differenzierbar** oder C^1 . Dies ist äquivalent dazu, dass alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind. Falls DF wieder differenzierbar ist, existiert eine zweite Ableitung D^2F und iterativ definiert man k -fache Differenzierbarkeit und die k -te Ableitung D^kF . Falls die Ableitungen beliebiger Ordnung existieren spricht man von einer **unendlich oft differenzierbaren Abbildung**, einer C^∞ **Abbildung** oder einer **glatten Abbildung**. Diese Eigenschaft ist äquivalent dazu, dass alle partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung existieren.

Konvention: In dieser Vorlesung interessieren wir uns ausschließlich für unendlich oft differenzierbare Abbildungen. Das Wort “differenzierbar” ist stets in diesem Sinn zu verstehen.

Einige wichtige Sätze aus Analysis II

Satz B.1 (Kettenregel). Sei $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $G: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenzierbar mit $F(U) \subset V$. Dann ist $G \circ F$ differenzierbar und es gilt für alle $p \in U$

$$D(G \circ F)(p) = DG(F(p)) \circ DF(p).$$

Zur Erinnerung: ein **Diffeomorphismus** ist eine bijektive differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch differenzierbar ist.

Satz B.2 (Lokale Invertierbarkeit). Sei $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar und für ein $p \in U$ sei $DF(p)$ invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ von p , so dass die Einschränkung $F|_V: V \rightarrow V'$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge $V' \subset \mathbb{R}^m$ ist.

Literatur

- [BJ82] T. Bröcker and K. Jänich, *Introduction to differential topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [Bre93] G. E. Bredon, *Topology and geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 139, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [Lee13] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer-Verlag, 2013.
- [Mil65] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, Va., 1965.
- [Sar42] A. Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bulletin of the American Mathematical Society **48** (1942), 883–890.
- [Wal16] C. T. C. Wall, *Differential topology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 156, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.