

Geometrie und Topologie (SoSe 2020)

— Ergänzende Notizen —

Dr. Stefan Behrens

Universität Bielefeld

(Letzte Änderung: 15. Juli 2020)

Eine Sammlung von Kommentaren und Ergänzungen zur Lektüre von Bredon's „*Topology and Geometry*“ [Bre93]. Es handelt sich mehr oder weniger um die Notizen, die ich zur Vorbereitung für mich selbst mache. Das Dokument ist definitiv mehr Flickenteppich als kohärenter Text. Ich hoffe, es ist trotzdem hilfreich.

Inhaltsverzeichnis

1	Woche 1	4
2	Woche 2	4
2.1	Dienstag, 28. April	4
2.1.1	Basisbegriffe	4
2.1.2	Abzählbarkeitsaxiome	4
2.1.3	Erzeugte Topologien	5
2.1.4	Einschub: Die „Kategorie“ der topologischen Räume	5
2.1.5	Unterräume und stetige Abbildungen	6
2.1.6	Inneres, Abschluss und Rand	7
2.2	Donnerstag, 30. April	8
2.2.1	Größte/kleinste Topologien, so dass...	8
2.2.2	Die Quotiententopologie	9
2.2.3	Exkurs: Was ist überhaupt ein Produkt?	10
2.2.4	Die Produkttopologie	12
3	Woche 3	13
3.1	Dienstag, 5. Mai	13
3.1.1	Beispiele für Unterräume, Produkte und Quotienten	13
3.2	Donnerstag, 7. Mai	14
3.2.1	Zusammenhang	14
3.2.2	Wegzusammenhang	14

4	Woche 4	15
4.1	Dienstag, 12. Mai	15
4.1.1	Wegzusammenhang ist nicht Zusammenhang	15
4.1.2	Offenheit von Komponenten. Lokal zusammenhängende Räume.	16
4.1.3	Quotienten und Produkte zusammenhängender Räume	16
4.2	Donnerstag, 14. Mai	19
4.2.1	Trennungseigenschaften	19
5	Woche 5	21
5.1	Dienstag, 19. Mai	21
5.1.1	Konvergenz in topologischen Räumen.	21
5.1.2	Erbsfragen bei Trennung	23
5.1.3	Trennung in speziellen Quotienten.	23
5.2	Donnerstag, 21. Mai (Feiertag)	25
6	Woche 6	26
6.1	Dienstag, 26. Mai	26
6.1.1	Kompaktheit und Überdeckungen	26
6.1.2	Kompaktheit in \mathbb{R}^n	27
6.1.3	Einige Beispiele kompakter Räume und Homöomorphismen	27
6.2	Donnerstag, 28. Mai	29
6.2.1	Kompaktheit von Produkten	29
6.2.2	Einbettungen	30
6.2.3	Topologische Summen	31
6.2.4	Ankleben von Räumen	31
7	Woche 7	32
7.1	Dienstag, 2. Juni	32
7.1.1	Kompaktheit in metrischen Räumen	32
7.1.2	Metrisierbarkeit	32
7.1.3	Normalität und Existenz stetiger Funktionen	34
7.2	Donnerstag, 4. Juni	37
7.2.1	Anklebungen und Zellkomplexe	37
7.2.2	Lokal Euklidische Räume und topologische Mannigfaltigkeiten	41
8	Woche 8	44
8.1	Dienstag, 9. Juni	44
8.1.1	Ein Beispiel vorweg	44
8.1.2	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	44
8.1.3	Funktionale Strukturen und Garben	47
8.2	Donnerstag, 11. Juni (Feiertag)	48
9	Woche 9	49
9.1	Dienstag, 16. Juni	49
9.1.1	Einige abstrakte Beispiele von C^∞ Mannigfaltigkeiten	49
9.1.2	Konkrete Beispiele für C^∞ Mannigfaltigkeiten	50
9.1.3	Einige Nichtbeispiele	51
9.1.4	Ein Diffeomorphismus	52
9.2	Donnerstag, 18. Juni	53
9.2.1	Richtungsvektoren in \mathbb{R}^n	53
9.2.2	Tangentialvektoren und Differentiale	54

10 Woche 10	57
10.1 Dienstag, 23. Juni	57
10.1.1 Lokale Darstellung von Differentialen	57
10.1.2 Lokale Eigenschaften von C^∞ Abbildungen	57
10.1.3 Kritische Punkte und reguläre Werte	57
10.2 Donnerstag, 25. Juni	58
10.2.1 Lokale Diffeomorphismen & Parametrisierungen	58
10.2.2 Beispiele für kritische Punkte und reguläre Werte	58
10.2.3 Der Satz von Sard	58
11 Woche 11	60
11.1 Dienstag, 30. Juni	60
11.1.1 Klassifikationsprobleme	60
11.1.2 Homotpie und Homotpieäquivalenz	60
11.2 Donnerstag, 2. Juli	61
11.2.1 Beispiele für Homotpieäquivalenzen	61
11.2.2 Die Fundamentalgruppe	61
12 Woche 12	62
12.1 Dienstag, 7. Juli	62
12.1.1 Abhängigkeit der Fundamentalgruppe vom Basispunkt	62
12.1.2 Kategorien und Funktoren	62
12.2 Donnerstag, 9. Juli	63
12.2.1 Kategorien und Funktoren (Fortsetzung)	63
12.2.2 Fundamentalgruppen von Produkträumen	63
12.2.3 Überlagerungen	63
13 Woche 13	64
13.1 Dienstag, 14. Juli	64
13.1.1 Hochhebungseigenschaften	64
13.1.2 Überlagerungen und π_1	67
A Zusammenfassungen einzelner Themenbereiche	69
A.1 Konstruktionen mit topologischen Räumen	69
A.1.1 Unterräume	69
A.1.2 Quotientenräume	70
A.1.3 Produkte	71
A.1.4 Topologische Summen	74
B Zur Prüfungsvorbereitung	76

1 Woche 1

Siehe Videos.

2 Woche 2

2.1 Dienstag, 28. April

2.1.1 Basisbegriffe

Sei X ein topologischer Raum und \mathcal{T} die Topologie, d.h. die Menge der offenen Teilmengen von X . Für $x \in X$ sei $\mathcal{N}(x)$ die Mengen aller Umgebungen von x (siehe [Bre93, I.2.3]).

\mathcal{B}_x Umgebungsbasis	$:\Leftrightarrow$	Jede Umgebung von x enthält eine Umgebung aus \mathcal{B}_x
\mathcal{B} Basis	$:\Leftrightarrow$	$\mathcal{T} = \{\text{Vereinigungen von } \mathcal{B}\text{-Mengen}\}$
\mathcal{S} Subbasis	$:\Leftrightarrow$	$\mathcal{T} = \{\text{Vereinigungen endlicher Durchschnitte von } \mathcal{S}\text{-Mengen}\}$

Mit \mathcal{B} -Mengen sind hier die Elemente von \mathcal{B} gemeint, analog für \mathcal{S} . Paradebeispiele sind die metrischen Bälle $B_\epsilon(x)$ für variierende x und ϵ in metrischen Räumen.

Achtung! Die Begriffe *Subbasis* und *Basis* werden in der Literatur nicht einheitlich verwendet. Hier muss man vorsichtig sein, wenn man woanders nachliest.

2.1.2 Abzählbarkeitsaxiome

Die Begriffe „*first/second countable*“ aus [Bre93, I.2.9, I.2.10] heißen auf Deutsch traditionell *Abzählbarkeitsaxiome*. Dazu einige Bemerkungen:

1. Abzählbarkeitsaxiom:

- *Inhalt:* Jeder Punkt besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis.
- *Interpretation:* Die Topologie ist *lokal* nicht zu komplex.
- *Beispiele:* Alle Metrischen Räume und alle diskreten Räume.
- *Gegenbeispiel:* Die *starke Whitney Topologie* auf $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

2. Abzählbarkeitsaxiom:

- *Inhalt:* Es gibt eine abzählbare Basis der Topologie.
 - *Interpretation:* Die Topologie ist *global* nicht zu komplex.
 - *Beispiele:* \mathbb{R}^n , $L^2(\mathbb{R}^n)$, $C^0([0, 1])$ mit der Supremumsnorm. Allgemeiner metrische Räume, die eine dichte abzählbare Menge haben.
 - *Gegenbeispiel:* Die diskrete Topologie auf \mathbb{R} , genauso jeder überabzählbare diskrete Raum.
- Ich finde die Namen eher verwirrend als hilfreich und spreche meist direkt von Räumen „mit abzählbarer (Umgebungs-)Basis“.
 - Die Bedeutung der abzählbaren Basen und Umgebungsbasen wird erst später klar werden. Allgemein gilt für viele Dinge in der Topologie grob gesagt:
 - endlich \rightsquigarrow gut
 - abzählbar unendlich \rightsquigarrow in Ordnung
 - überabzählbar \rightsquigarrow Alarm!

2.1.3 Erzeugte Topologien

Wie im Buch beschrieben ist jede Menge von Teilmengen $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ Subbasis irgendeiner Topologie, nämlich der *durch \mathcal{S} erzeugte Topologie*

$$\tau(\mathcal{S}) = \{\text{Vereinigungen von endlichen Schnitten von } \mathcal{S}\text{-Mengen}\}.$$

Diese hat noch eine andere Beschreibung. Hierzu hilft es, die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ etwas systematischer auszunutzen. Für alle, die schon Maß- und Integrationstheorie gehört haben, ist diese Perspektive wahrscheinlich schon gewohnt. Ich will Sie hier aber nicht überstrapazieren, da sie die Theorie noch formaler erscheinen lässt als sie eh schon daher kommt.

Per Definition ist eine Topologie auf X eine Teilmenge $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, die den drei Bedingungen aus [Bre93, I.2.1] genügt. Für beliebige Teilmengen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ sind wieder Vereinigung $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, Durchschnitt $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, und die Teilmengenrelation $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ erklärt, insbesondere also auch für Topologien $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \subset \mathcal{P}(X)$.

Achtung! An dieser Stelle muss man etwas aufpassen, dass man die Mengenoperationen für Teilmengen von $\mathcal{P}(X)$ nicht mit denen für Teilmengen von X verwechselt.

Falls $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ gilt, nennt man \mathcal{T}' *größer* als \mathcal{T} , oder andersrum \mathcal{T} *kleiner* als \mathcal{T}' (vgl. [Bre93, I.2.14]). Wir halten zwei Eigenschaften fest, die trivial durch Ausschreiben der Definitionen folgen.

- Für jede Topologie \mathcal{T} auf X gilt $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$.
- Der Durchschnitt beliebig vieler Topologien auf X ist wieder eine Topologie auf X .

Insbesondere können wir für eine gegebene Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ den Durchschnitt über allen Topologien bilden, die \mathcal{S} enthalten.

Lemma 2.1.1. *Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist die von \mathcal{S} erzeugte Topologie $\tau(\mathcal{S})$ der Durchschnitt aller Topologien auf X , die \mathcal{S} enthalten. Insbesondere ist $\tau(\mathcal{S})$ bezüglich der Relation $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ die kleinste Topologie, die \mathcal{S} enthält.*

Beweis. Sei \mathcal{T} der Durchschnitt über alle Topologien, die \mathcal{S} enthalten. Da $\tau(\mathcal{S})$ eine solche Topologie ist, gilt einerseits $\mathcal{T} \subset \tau(\mathcal{S})$. Andererseits gilt $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, und weil \mathcal{T} als Topologie abgeschlossen unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten ist, folgt $\tau(\mathcal{S}) \subset \mathcal{T}$. \square

Achtung! Die Vereinigung zweier Topologien ist im Allgemeinen keine Topologie. Gegenbeispiele lassen sich leicht ergooglen.

Leider ist Bredon's Definition der „größten/kleinsten Topologie, so dass...“ in [Bre93, I.2.14] etwas verwirrend bis falsch formuliert. Mehr dazu später.

2.1.4 Einschub: Die „Kategorie“ der topologischen Räume

Hier ein kurzer Hinweis auf zwei Offensichtlichkeiten, die Bredon gar nicht erst explizit nennt:

Lemma 2.1.2.

- (i) *Für jeden topologischen Raum X ist die Identitätsabbildung $\text{id}_X: X \rightarrow X$ stetig.*
- (ii) *Falls $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ stetig sind, so auch die Komposition $g \circ f: X \rightarrow Z$.*

Beweis. Beides folgt sofort aus der Definition. \square

Achtung! Die Aussage (1) ist so zu verstehen, dass im Start- und Zielbereich sowohl dieselbe Menge X als auch dieselbe Topologie auftritt. Für verschiedene Topologien ist $\text{id}_X: (X, \mathcal{T}_{\text{Start}}) \rightarrow (X, \mathcal{T}_{\text{Ziel}})$ genau dann stetig wenn $\mathcal{T}_{\text{Ziel}} \subset \mathcal{T}_{\text{Start}}$.

Die Eigenschaften (1) und (2) besagen, dass topologische Räume zusammen mit stetigen Abbildungen eine sogenannte *Kategorie* bilden. Sie kennen bereits einige andere Kategorien:

- Mengen und beliebige Abbildungen
- Vektorräume und lineare Abbildungen
- Gruppen und Gruppenhomomorphismen

In allen Fällen gibt sogenannte *Objekte* in Form von Mengen mit einer zusätzlichen Struktur und *Morphismen* in Form von Abbildungen, die mit der zusätzlichen Struktur verträglich sind. Die Sprache der Kategorien ist ein sehr nützliches Organisationsprinzip in der (vornehmlich reinen) Mathematik.

Zur Illustration sei kurz der Begriff *Homöomorphismus* erwähnt (siehe [Bre93, I.2.7]). Darunter versteht man eine bijektive, stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, deren Umkehrabbildung $f^{-1}: Y \rightarrow X$ ebenfalls stetig ist. Äquivalent ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ genau dann ein Homöomorphismus wenn es eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, so dass $f \circ g = \text{id}_Y$ und $g \circ f = \text{id}_X$. Homöomorphismen sind also genau die *invertierbaren Morphismen*, auch genannt *Isomorphismen*, in der Kategorie der topologischen Räume.

Achtung! Die Stetigkeit von f^{-1} ist keine Selbstverständlichkeit! Beispiele folgen.

In der modernen algebraischen Topologie ist die Sprache der Kategorien nahezu omnipräsent. Für den Moment reicht es allerdings, wenn Sie die Worte *Kategorie*, *Objekt*, *Morphismus* und vielleicht noch *Isomorphismus* irgendwo im Hinterkopf behalten.

2.1.5 Unterräume und stetige Abbildungen

Über Unterräume habe ich in den Videos schon etwas erzählt. Falls X ein topologischer Raum ist, erhält jede Teilmenge $A \subset X$ eine Topologie, genannt *Unterraumtopologie* oder auch *Relativtopologie*. Die offenen Mengen sind wie folgt definiert (siehe [Bre93, I.3.1])

$$V \subset A \text{ (relativ) offen} \iff V = A \cap U \text{ für eine offene Teilmenge } U \subset X$$

Auch hierzu einige Offensichtlichkeiten:

Lemma 2.1.3. Sei $A \subset X$ ein Unterraum und Y ein weiterer topologischer Raum.

- (i) Die Inklusionsabbildung $i: A \rightarrow X$ ist stetig.
- (ii) Falls $f: X \rightarrow Y$ stetig ist, so ist auch die Einschränkung $f|_A = f \circ i: A \rightarrow Y$ stetig.
- (iii) Eine Abbildung $f: Y \rightarrow A$ ist genau dann stetig wenn die Komposition $i \circ f: Y \rightarrow X$ stetig ist.

Beweis. (i) Für offenes $U \subset X$ gilt $i^{-1}(U) = A \cap U$.

(ii) Folgt sofort aus (i) und Lemma 2.1.2(ii).

(iii) Falls f stetig ist, ist $i \circ f$ als Komposition stetiger Abbildungen stetig (siehe Lemma 2.1.2). Ist umgekehrt $i \circ f$ stetig, so ist für offen $U \subset X$ das Urbild $(i \circ f)^{-1}(U)$ offen. Nun gilt aber

$$(i \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(i^{-1}(U)) = f^{-1}(A \cap U),$$

so dass $f^{-1}(V)$ für jede relativ offene Menge $V = A \cap U$ offen ist. □

Die Aussagen in [Lemma 2.1.3](#) wirken wahrscheinlich selbstverständlicher als die Definition der Unterraumtopologie selbst. Letztendlich ist die Unterraumtopologie genau so definiert, dass die Aussage gelten.

Achtung! Nicht jede stetige Abbildung $A \rightarrow Y$ ist die Einschränkung einer stetigen Abbildung $X \rightarrow Y$. Offensichtliches Beispiel: $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$. Mehr dazu später.

Beispiel 2.1.4. Die Konstruktion der Unterraumtopologie und [Lemma 2.1.3](#) liefern auf einen Schlag viele Beispiele topologischer Räume und stetiger Abbildungen. Hier nur eins: die Exponentialabbildung $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist bekanntermaßen stetig, und somit auch die Abbildung $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{f}(t) = e^{it}$. Bekanntermaßen nimmt \tilde{f} nur Werte auf dem Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{C}$ an. Formal heißt das nicht anderes, als dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ gibt, so dass $\tilde{f} = i \circ f$ als Komposition mit der Inklusion $i: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ entsteht.

Abschließend zum Thema Unterraumtopologie noch kurz:

zu [\[Bre93, I.3.7\]](#): Sei $Y \subset X$ als Unterraum topologisiert und \mathcal{B} eine Basis der Topologie von X . Dann ist jede offene Menge in Y von der Form $\cup_{i \in I} B_i$ mit $B_i \in \mathcal{B}$. Folglich ist jede relativ offene Menge in Y von der Form

$$Y \cap (\cup_{i \in I} B_i) = \cup_{i \in I} (Y \cap B_i).$$

Ergo ist $\{Y \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ eine Basis für die Unterraumtopologie auf Y .

zu [\[Bre93, I.3.8\]](#): Sei X ein topologischer Raum, $Y \subset X$ ein Unterraum und $Z \subset Y$ ein Unterraum des Unterraums Y . Offene Mengen in Z haben dann die Form $Z \cap V$ mit $V \subset Y$ offen. Letzteres bedeutet, dass $V = Y \cap U$ mit $U \subset X$ offen. Da $Z \subset Y$ gilt

$$Z \cap V = Z \cap (Y \cap U) = Z \cap U$$

so dass die Topologie auf Z mit der Unterraumtopologie bezüglich X übereinstimmt.

2.1.6 Inneres, Abschluss und Rand

Sei X ein topologischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. In [\[Bre93, I.3.3, I.3.4\]](#) werden implizit das *Innere* $\text{int}(A)$ und der *Abschluss* \bar{A} definiert. Etwas konkreter lassen diese sich wie folgt beschreiben:

- $\text{int}(A)$ ist die Vereinigung aller offenen Mengen $U \subset X$ mit $U \subset A$.
- \bar{A} ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen $C \subset X$ mit $A \subset C$.

Der beliebige Vereinigungen offener (bzw. Durchschnitte abgeschlossener) Teilmengen wieder offen (bzw. abgeschlossen) ist, folgt die Charakterisierung von $\text{int}(A)$ als größte offene Teilmenge (bzw. \bar{A} als kleinste abgeschlossene Obermenge) von A mit dem gleichen Argument wie [Lemma 2.1.1](#). Der Beweis von [\[Bre93, I.3.5\]](#) ist mit dieser Beschreibung des Abschlusses offensichtlich.

Proposition I.3.9 und Problem 1(b) liefern die bekannte Beschreibung von Abschluss und abgeschlossenen Mengen in metrischen Räumen: eine Menge $A \subset X$ ist abgeschlossen genau dann wenn sie alle Grenzwerte von Folgen in A , die in X konvergieren, enthält. Der Beweis von Proposition I.3.9 sollte verständlich genug im Buch stehen.

Achtung! Diese Charakterisierung gilt nicht in allen topologischen Räumen. Siehe [\[Bre93, I.6.7\]](#) für eine Verallgemeinerung. Grundsätzlich „sehen“ Folgen nur genug von der Topologie wenn der Raum abzählbare Umgebungsbasen hat, also das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

2.2 Donnerstag, 30. April

2.2.1 Größte/kleinste Topologien, so dass...

Wie bereits bemerkt ist Bredon's Definition der „größten/kleinsten Topologie, so dass...“ in [Bre93, I.2.14] zumindest verwirrend, wenn nicht gar falsch. Bredon schreibt von

„Eigenschaften, die Teilmengen von X erfüllen können“.

Was er aber eigentlich meint (bzw. meinen sollte), sind

„Eigenschaften, die Topologien auf X erfüllen können“.

Das wird in den angegebenen Beispielen deutlich. Hier ein Korrekturversuch, verbunden mit dem ausdrücklichen Hinweis, diese Begrifflichkeiten nicht zu wichtig zu nehmen.

Sei X eine beliebige Menge und

$$\mathbb{T}(X) = \{\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{T} \text{ Topologie auf } X\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$$

die Menge aller Topologien auf X . Statt von „Eigenschaften, die Topologien auf X erfüllen können“, kann man äquivalent auch von Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{T}(X)$ sprechen; die entsprechende Eigenschaft ist dann $\mathcal{T} \in \Omega$.

Achtung! Die Situation ist hier etwas verschachtelt. Eine Menge von Topologien auf X ist formal eine Menge von Teilmengen der Menge aller Teilmengen von X . Autsch. Noch weiter treiben wir dieses Spiel aber nicht, versprochen.

Nun stellt sich heraus, dass jede Menge Ω von Topologien auf X bezüglich der Relation $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ so etwas wie ein Infimum und ein Supremum hat, d.h. eine größte untere und eine kleinste obere Schranke. Etwas präziser:

Lemma 2.2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{T}(X)$ eine Menge von Topologien auf X . Dann sind durch

$$\inf \Omega = \bigcap_{\mathcal{T} \in \Omega} \mathcal{T} \in \mathbb{T}(X) \quad \text{und} \quad \sup \Omega = \tau\left(\bigcup_{\mathcal{T} \in \Omega} \mathcal{T}\right) \in \mathbb{T}(X)$$

Topologien gegeben, die folgende Eigenschaften erfüllen:

- (i) Für alle $\mathcal{T} \in \Omega$ gilt $\inf \Omega \subset \mathcal{T} \subset \sup \Omega$.
- (ii) Für alle $\mathcal{T}_*, \mathcal{T}^* \in \mathbb{T}(X)$, die $\mathcal{T}_* \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$ für alle $\mathcal{T} \in \Omega$ erfüllen, gilt $\mathcal{T}_* \subset \inf \Omega$ und $\sup \Omega \subset \mathcal{T}^*$.

Beweis. Eigenschaft (i) ist per Konstruktion erfüllt. Ebenso ist klar, dass jede Topologie \mathcal{T}_* mit $\mathcal{T}_* \subset \mathcal{T}$ für alle $\mathcal{T} \in \Omega$ in $\inf \Omega$ enthalten ist. Ist schließlich \mathcal{T}^* eine Topologie mit $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$ für alle $\mathcal{T} \in \Omega$, so folgt aus Lemma 2.1.1, dass $\sup \Omega \subset \mathcal{T}^*$. \square

In den praxisrelevanten Beispielen gilt oft $\inf \Omega = \{\emptyset, X\}$ oder $\sup \Omega = \mathcal{P}(X)$ und in der Regel kann man die jeweils andere Schranke explizit hinschreiben. Insofern kann man diesen Abschnitt halbwegs guten Gewissens als Gedankenspielerei abtun. Wer mehr wissen möchte, sollte nach „Verband der Topologien“ oder „lattice of topologies“ zu googlen.

Beispiel 2.2.2. Als Beispiel betrachtet Bredon (mit etwas anderer Notation) eine Abbildung $f: Z \rightarrow X$, wobei X eine noch untopologisierte Menge ist und Z bereits ein topologischer Raum. Gesucht ist:

„die größte Topologie auf X , die f stetig macht“⁴¹

⁴¹...was nebenbei keine „Eigenschaften, die Teilmengen von X erfüllen können“ wie in [Bre93, I.2.14] gefordert ist.

Die Bedingung entspricht der Menge

$$\begin{aligned}\Omega_f &= \{\mathcal{T} \in \mathbb{T}(X) \mid f \text{ stetig bezüglich } \mathcal{T}\} \\ &= \{\mathcal{T} \in \mathbb{T}(X) \mid \forall U \in \mathcal{T}: f^{-1}(U) \subset X \text{ offen}\} \subset \mathbb{T}(X).\end{aligned}$$

Da $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(X) = Z$ offen in Z sind, gilt $\{\emptyset, X\} \in \Omega_f$ und somit $\inf \Omega_f = \{\emptyset, X\}$. Andererseits überzeugt man sich leicht, dass durch

$$\{U \subset X \mid f^{-1}(U) \subset Z \text{ offen}\}$$

eine Topologie gegeben ist, und offenbar die Größte, bezüglich welcher f stetig ist. Die Konstruktion liefert also die abstrakt garantierte Topologie $\sup \Omega_f$ ganz konkret.

2.2.2 Die Quotiententopologie

Beispiel 2.2.2 beschreibt im wesentlichen schon die Konstruktion Quotiententopologie [Bre93, I.13.1]. Zur Erinnerung:

- **Input:** Y Menge, X topologischer Raum, $f: X \rightarrow Y$ surjektive Abbildung
- **Output:** Topologie auf Y , genannt *Quotiententopologie* oder *von f induzierte Topologie*:

$$\mathcal{T}_f = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \subset X \text{ offen}\}$$

Alternativ lässt sich die Situation auch wie in [Bre93, I.13.2] beschreiben:

- **Input:** X topologischer Raum, \sim Äquivalenzrelation auf X
- **Zwischenschritt:** Menge $X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$ aller Äquivalenzklassen, surjektive Abbildung $\pi: X \rightarrow X/\sim$
- **Output:** Quotiententopologie auf X/\sim

Mit dieser Topologie nennt man X/\sim einen *Quotientenraum* von X .

Bemerkung. (Wird später erklärt.) Offensichtlich ist die zweite Konstruktion ein Spezialfall der Ersten. Hat man allerdings eine surjektive Abbildung $f: X \rightarrow Y$ gegeben, so ist für $x, y \in X$ durch

$$x \sim_f y \quad :\iff \quad f(x) = f(y)$$

eine Äquivalenzrelation auf X gegeben und man überzeugt sich leicht, dass durch

$$X/\sim_f \longrightarrow Y, \quad [x] \mapsto f(x)$$

eine wohldefinierte Abbildung gegeben ist. Man kann nun Folgendes zeigen:

Beh: Die Abb $X/\sim_f \longrightarrow Y$ ist ein Homöomorphismus.

In diesem Sinne kann man die erste Konstruktion auch als Spezialfall der zweiten auffassen. Der Beweis der Behauptung ist eine gute Übung für das Verständnis der Quotiententopologie.

Sei wie gehabt Y eine Menge, X ein topologischer Raum, und $f: X \rightarrow Y$ surjektiv. Die Quotiententopologie \mathcal{T}_f auf Y hat folgende Eigenschaft (vgl. [Bre93, I.13.5]):

Eine Abbildung $g: Y \rightarrow Z$ in einen beliebigen Raum Z ist genau dann stetig bezüglich \mathcal{T}_f wenn die Komposition $g \circ f: X \rightarrow Z$ stetig ist.

Anders gesagt, um Stetigkeit von Abbildung *aus* einen Quotientenraum von X nachzuweisen, muss man im Prinzip „nur“ die Stetigkeit einer Abbildung *aus* X selbst zeigen. Letzteres ist oft bequemer, als direkt mit der Quotiententopologie zu arbeiten.

Tatsächlich charakterisiert diese Eigenschaft die Quotiententopologie vollständig (siehe [Bre93, I.13.5]). Den Beweis kann und sollte man bei Bredon nachlesen. Bei Bedarf kann ich dazu auch noch etwas erzählen. Vorerst nehmen wir das allerdings nur zur Kenntnis und schauen uns in einigen Beispielen an, warum man sich überhaupt dafür interessieren sollte.

2.2.3 Exkurs: Was ist überhaupt ein Produkt?

Wenn ich nach „dem Produkt endlich vieler Mengen X_1, \dots, X_n “ Frage, denke Sie wahrscheinlich alle an dasselbe:

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i\}.$$

Wir denken uns Elemente des Produkts als geordnete n -Tupel.

Achtung! Mit dieser Beschreibung von endlichen Produkten lässt sich wunderbar arbeiten. Bei genauerer Betrachtung ergeben sich allerdings kleinere Ungeheimheiten.

Denn: für drei Mengen A, B, C gilt streng genommen

$$A \times B \times C \neq (A \times B) \times C \neq A \times (B \times C).$$

Frage: Welche dieser drei Mengen ist das „richtige“ Produkt?

Antwort: Gewissermaßen alle, aber auch irgendwie keine.

Bessere Antwort: Es gibt kein eindeutiges Produkt, sondern viele. Aber alle Produkte sind „kanonisch isomorph“.

Hier der Schlüssel zur Lösung der Verwirrung: Zurück zu X_1, \dots, X_n . Offensichtlich haben wir ein Reihe von Abbildungen

$$X_1 \times \cdots \times X_n \xrightarrow{p_i} X_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n,$$

nämlich die Projektionen auf die einzelnen Komponenten. Für Abbildungen $f_i: T \rightarrow X_i$, $i = 1, \dots, n$, gibt es eine Abbildung

$$f: T \rightarrow \times_i X_i, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

und es gilt $f_i = p_i \circ f$ für alle i . Tatsächlich ist f die einzige Abbildung mit dieser Eigenschaft. Letztendlich bedeutet das aber nichts anderes als die Selbstverständlichkeit, dass eine Abbildung in ein Produkt vollständig durch ihre Komponenten bestimmt ist. Der springende Punkt ist, dass man für die „anders geklammerten Produkte“ ebenfalls von Komponenten sprechen kann. Diese Einsicht führt zu einer neuen Sichtweise auf Produkte.

Definition 2.2.3 (Universelle Eigenschaften von Produkten). Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Mengen. Ein *Produkt* von $\{X_i\}_{i \in I}$ ist eine Menge P zusammen mit Abbildungen $p_i: P \rightarrow X_i$, $i \in I$, so dass folgende *universelle Eigenschaft* erfüllt ist:

Für jede Menge T und jede Familie von Abbildungen $f_i: T \rightarrow X_i$, $i \in I$, gibt es eine eindeutige Abbildung $f: T \rightarrow P$, so dass $f_i = p_i \circ f$.

Man sagt auch, f sei die Lösung des *universellen Problems*:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \exists! \nearrow & \downarrow p_i & (i \in I) \\ T & \xrightarrow{f_i} & X_i \end{array}$$

Der gestrichelte Pfeil bedeutet, dass nach eine Abbildung gesucht ist, die das Diagramm kommutativ macht, und die Schreibweise $\exists!$ deutet an, dass es eine eindeutige solche Abbildung gibt.

Der nächste Satz ist ein erstes Beispiel einer...

Universalweisheit: Objekte, die eine gegebene universelle Eigenschaft charakterisieren, sind bis auf kanonische Isomorphie eindeutig.

Wie die Formulierung andeutet, kann man universelle Eigenschaften in beliebigen Kategorien formulieren, aber das nur nebenbei.

Satz 2.2.4. Seien $(P, \{p_i\}_{i \in I})$ und $(P', \{p'_i\}_{i \in I})$ zwei Produkte einer Familie Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ von Mengen. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Bijektionen $\kappa: P \rightarrow P'$ und $\kappa': P' \rightarrow P$, so dass $p_i = p'_i \circ \kappa$ und $p'_i = p_i \circ \kappa'$ für jedes $i \in I$. Anders gesagt, das folgende Diagramm kommutiert für alle $i \in I$:

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{\kappa} & P' & \xrightarrow{\kappa'} & P \\ & \searrow p_i & \downarrow p'_i & \swarrow p_i & \\ & & X_i & & \end{array}$$

Beweis. Wir wenden die universelle Eigenschaft von $(P', \{p'_{ii \in I}\})$ auf die Familie von Abbildungen $p_i: P \rightarrow X_i$ an und erhalten so eine eindeutig bestimmte Abbildung $\kappa: P \rightarrow P'$, so dass $p_i = p'_i \circ \kappa$. Das gleiche Argument mit vertauschten Rollen liefert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\kappa': P' \rightarrow P$, so dass $p'_i = p_i \circ \kappa'$. Nun stellen wir fest, dass

$$p_i \circ (\kappa' \circ \kappa) = (p_i \circ \kappa') \circ \kappa = p'_i \circ \kappa = p_i$$

und analog $p'_i \circ (\kappa \circ \kappa') = p'_i$. Wir haben also für alle $i \in I$ kommutative Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\kappa' \circ \kappa} & P \\ & \searrow p_i & \swarrow p_i \\ & & X_i \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{\kappa \circ \kappa'} & P \\ & \searrow p'_i & \swarrow p'_i \\ & & X_i \end{array}$$

Die universellen Eigenschaften der beiden Produkte besagen allerdings, dass es jeweils nur eine solche Abbildung in der oberen Zeile geben darf. Folglich muss $\kappa \circ \kappa' = \text{id}_{P'}$ und $\kappa' \circ \kappa = \text{id}_P$. \square

Mit diesem Satz löst sich schließlich die Verwirrung um die Produkte $A \times B \times C$, $(A \times B) \times C$ und $A \times (B \times C)$ mit den jeweils offensichtlichen Projektionen auf A , B und C . Es ist ziemlich egal, mit welcher Beschreibung wir arbeiten. Denn alle erfüllen die universelle Eigenschaft aus [Definition 2.2.3](#), so dass [Satz 2.2.4](#) quasi gottgegebene Bijektionen liefert, die zwischen den verschiedenen Produkten übersetzen.

Ein weiterer Vorteil dieser Sichtweise auf Produkte ist, dass sie auch für unendliche Produkte sinnvoll ist. In Zukunft schreiben wir Produkte als $\times_{i \in I} X_i$ mit dem stillschweigenden Einverständnis, dass wir uns der Existenz der Projektionen $p_i: \times_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ bewusst sind.

Achtung! Eine formale Konstruktion eines Produkts innerhalb der Mengenlehre ist wie folgt möglich. Für Mengen $\{X_i\}_{i \in I}$ kann man als Produktmenge

$$\times_{i \in I} X_i = \{f: I \rightarrow \cup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i \forall i \in I\}$$

wählen. Hierbei ist $\cup_{i \in I} X_i$ die abstrakte, axiomatisch postulierte Vereinigung von Mengen. Als Projektionen $p_i: \times_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ kann man die Auswertabbildungen $p_i(f) = f(i)$ wählen. Man prüft leicht nach, dass die universelle Eigenschaft aus [Definition 2.2.3](#) erfüllt ist. Allerdings stellt man genauso leicht fest, dass diese bequeme Konstruktion für endliche Produkte a priori nichts mit geordneten Tupeln zu tun hat. Ärgerlich, aber nichts dran zu ändern. Gut, dass es die universelle Eigenschaft gibt!

2.2.4 Die Produkttopologie

Sei nun $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räumen (also Mengen mit Topologien) und $\times_{i \in I} X_i$ ein Produkt mit Projektionen $p_i: \times_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$. Eins sollte mittlerweile klar sein: was auch immer man für eine Topologie auf $\times_{i \in I} X_i$ betrachtet, die Projektionen sollten besser stetig sein. Dies ist offenbar für die diskrete Topologie der Fall, weil de facto *alle* Abbildungen aus diskreten Räumen offen sind. Dass alle Abbildungen aus Produkten stetig sein sollten, klingt aber auch nicht wirklich sinnvoll. Hier empfiehlt es sich also, nach der *kleinsten* Topologie zu suchen, die die Projektionen stetig macht. Diese findet man durch folgende Überlegung: für $U_j \subset X_j$ offen gilt

$$p_j^{-1}(U_j) = \times_{i \in I} U_i, \quad \text{wobei} \quad U_i = \begin{cases} U_j, & i = j \\ X_i, & i \neq j \end{cases}$$

Nun stellt man fest, dass die von allen Mengen dieser Form erzeugte Topologie auf $\times_{i \in I} X_i$ ist genau das, was Bredon zu Beginn von Kap. I.8 hinschreibt. Und den Beweis von Proposition I.8.1 haben wir direkt mit erledigt.

Für endliche Produkte ist die Definition sowieso genau das, was man erwarten würde. Produkte offener Mengen sollten offen sein, also nimmt man einfach die von diesen Produkten erzeugte Topologie. Für unendliche Produkte ist allerdings nehmen wir allerdings die vielleicht etwas überraschende Einsicht mit, dass Produkte unendlich vieler beliebiger offener Mengen nicht offen sein müssen, um die Stetigkeit der Projektionen zu garantieren.

3 Woche 3

3.1 Dienstag, 5. Mai

3.1.1 Beispiele für Unterräume, Produkte und Quotienten

Es wird Zeit für einige Beispiele.

Beispiel 3.1.1 (\mathbb{R}^n als topologisches Produkt). Die Euklidische Topologie auf \mathbb{R}^n ist das n -fache Produkt der Standardtopologie auf \mathbb{R} . Um dies zu sehen betrachten wir folgende Basen der zwei Topologien:

- für $\mathbb{R}_{\text{eukl}}^n$ die Euklidischen Bälle $B_\epsilon(x) = x + B_\epsilon(x)$ und
- für $\mathbb{R}_{\text{prod}}^n$ die Würfel $W_\epsilon(x) = x + (-\epsilon, \epsilon)^n$.

Es gilt dann $B_\epsilon(x) \subset W_\epsilon(x) \subset B_{\epsilon\sqrt{n}}(x)$, was zur Folge hat, dass die Topologien übereinstimmen (vgl. [Bre93, I.1.3]).

Beispiel 3.1.2 (S^1 als Quotient, Teil 1). Wir kennen den Einheitskreis S^1 bisher als Unterraum von \mathbb{R}^2 oder \mathbb{C} . In [Beispiel 2.1.4](#) haben wir gesehen, dass die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad f(t) = e^{it}$$

stetig bezüglich der Standardtopologie auf \mathbb{R} und der Unterraumtopologie \mathcal{T}_u auf S^1 ist.

Beh: S^1 trägt die Quotiententopologie \mathcal{T}_f bezüglich f .

Zunächst ist f surjektiv, so dass die Grundvoraussetzung gegeben ist. Die Stetigkeit von f liefert uns die Inklusion $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}_u$. Um $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}_i$ zu sehen, sei $V \subset S^1$ gegeben, so dass $f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}$ offen ist. Dann gibt es für jedes $x = f(t) \in V$ ein $\epsilon \geq 0$, so dass $(t - \epsilon, t + \epsilon) \subset f^{-1}(V)$. Nun ist für hinreichend kleines ϵ

$$f((t - \epsilon, t + \epsilon)) = \underbrace{\left\{ (1 + r)e^{i(t+s)} \mid r, s \in (-\epsilon, \epsilon) \right\}}_{=: U_x} \cap S^1 \subset \mathbb{C}$$

und man kann z.B. mit dem Satz über die Umkehrfunktion aus Analysis 2 zeigen, dass $U \subset \mathbb{C}$ offen ist. Folglich ist $U_x \cap S^1 \in \mathcal{T}_i$ und da $x \in V$ beliebig war und $U_x \cap S^1 \subset V$ gilt, folgt schließlich $V \in \mathcal{T}_i$.

Beispiel 3.1.3 (S^1 als Quotient, Teil 2). $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $S^1 \cong [0, 1]/0 \simeq 1 = [0, 1]/\{0, 1\}$. (Siehe virtuelle Tafel für mehr Details)

Beispiel 3.1.4 (Kein Homöomorphismus). Bleiben wir beim obigen Beispiel und betrachten nun die eingeschränkte Abbildung

$$g: (0, 2\pi] \rightarrow S^1, \quad g(t) = e^{it}.$$

Diese Abbildung ist bekanntermaßen stetig und bijektiv. Die Umkehrabbildung $g^{-1}: S^1 \rightarrow (0, 2\pi]$ ist allerdings nicht stetig: es gilt nämlich $f(1/n) \rightarrow 1 = f(2\pi)$, aber die Folge $1/n$ hat in $(0, 2\pi]$ keinen Grenzwert.

3.2 Donnerstag, 7. Mai

Heute keine ausführlichen Notizen. Hier nur die Punkte, die nicht detailliert bei Bredon stehen (mit nachträglicher Nummerierung).

3.2.1 Zusammenhang

Lemma 3.2.1 (vgl. [Bre93, I.4, Problem 1]). *Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein zusammenhängender Unterraum. Dann ist auch der Abschluss $\bar{A} \subset X$ als Unterraum von X zusammenhängend.*

Beweis. Siehe virtuelle Tafel. □

Notation: Die Äquivalenzrelation aus [Bre93, I.4.8] kürze ich wie folgt ab:

$$x \sim_z y \quad :\iff \quad x, y \text{ liegen in einer zusammenhängenden Teilmenge von } X$$

Für die Komponente eines Punktes $x \in X$ schreibe ich

$$Z_x = \{y \in X \mid y \sim_z x\} = \bigcup_{x \in M \subset X \text{ zshgd}} M.$$

3.2.2 Wegzusammenhang

Im wesentlichen hatte ich Problem 5 aus Kapitel I.4 besprochen. Im Folgenden bezeichnet $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall und X ein topologischer Raum.

Definition 3.2.2. Ein Raum X heißt *wegzusammenhängend* wenn es für alle $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma: I \rightarrow X$ (genannt „Weg“ in X) gibt, so dass $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. In dem Fall schreiben wir $x \sim_w y$.

Lemma 3.2.3. *Durch $x \sim_w y$ ist eine Äquivalenzrelation auf X gegeben.*

Beweis.

- Für alle $x \in X$ gilt $x \sim_w x$ via dem konstanten Weg $\gamma(t) = x$ für alle $t \in I$.
- Falls γ ein Weg von x nach y ist, ist durch $\gamma^{\text{rev}}(t) = \gamma(1 - t)$ ein Weg von y nach x gegeben.
- Sei γ_1 ein Weg von x nach y und γ_2 ein Weg von y nach z . Dann ist durch

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t - 1), & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

ein Weg von x nach z gegeben. Diese Konstruktion nennt man *Verkettung* von Wegen. Die Stetigkeit ist leicht zu sehen (z.B. mit Hilfe von Aufgabe 2.3). □

Die entsprechenden Äquivalenzklassen heißen *Wegkomponenten* von X . Die Wegkomponente von $x \in X$ lässt sich beschreiben als

$$W_x = \{y \in X \mid y \sim_w x\} = \bigcup_{\gamma \in P_x X} \gamma(I)$$

wobei $P_x X = \{\gamma \in C(I, X) \mid \gamma(0) = x\}$ der sogenannte *Wegraum* von X mit *Basispunkt* x ist. Wegkomponenten und Komponenten sind im Allgemeinen nicht dasselbe. Beide Begriffe sind aber eng verwandt. Hier ein Indiz:

Lemma 3.2.4. *Wegkomponenten sind zusammenhängend.*

Beweis. Dies folgt aus der zweiten Beschreibung von W_x zusammen mit der Tatsache, dass Intervalle zusammenhängend sind (siehe Aufgabe 3.1), aus [Bre93, I.4.6 & I.4.7]. □

Insbesondere ist jeder wegzusammenhängende Raum zusammenhängend. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch (siehe nächste Sitzung). Dort werden wir auch sehen, dass Wegkomponenten weder offen noch abgeschlossen sein müssen.

4 Woche 4

4.1 Dienstag, 12. Mai

4.1.1 Wegzusammenhang ist nicht Zusammenhang

Wir überzeugen uns jetzt, dass die intuitiv motivierten Begriffe „zusammenhängend“ und „wegzusammenhängend“ tatsächlich verschieden sind. Das erschreckende dabei: das Paradebeispiel ist kein völlig abstruser topologischer Raum, sondern ein durchaus anschaulicher Unterraum von \mathbb{R}^2 .

Beispiel 4.1.1. (Der Topologensinus) Die Topologensinuskurve (*“topologist’s sine curve”*) kann man kurz und bündig als Abschluss des Graphen der Funktion $x \mapsto \sin(1/x)$ auf $(0, \infty)$ definieren, oder auch konkret beschreiben:

$$X = \underbrace{\{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\}}_{=:S} \cup \underbrace{\{0\} \times [-1, 1]}_{=:X_0} \subset \mathbb{R}^2.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass die Begriffe „zusammenhängend“ und „wegzusammenhängend“ im Allgemeinen nicht äquivalent sind. Des weiteren zeigt es, dass Wegkomponenten im Allgemeinen weder offen noch abgeschlossen sein müssen. Naheliegenderweise spielt die starke Oszillation von $\sin(1/x)$ nahe $x = 0$ eine Rolle.

X ist zusammenhängend: Wir überlegen uns zunächst, dass X tatsächlich der Abschluss von S ist. Das sieht man wie folgt:

- Nach [Bre93, I.3.9] ist \bar{S} die Menge aller Grenzwerte in \mathbb{R}^2 von Folgen in S .
- Leicht: Grenzwerte von Folgen in S müssen in entweder in S oder in X_0 liegen, es gilt also $\bar{S} \subset X$.
- Auch leicht: Jeder Punkte in X_0 ist Grenzwert einer Folge in S , ergo $X \subset \bar{S}$.

Daraus folgt nun, dass X zusammenhängend ist:

- Nach [Bre93, I.4.6] ist S als stetiges Bild des zusammenhängenden Raumes $(0, \infty)$ (siehe Übungen) zusammenhängend.
- X ist somit als Abschluss einer zusammenhängenden Menge selbst zusammenhängend.

X ist nicht wegzusammenhängend: Angenommen $\gamma: I \rightarrow X$ sei stetig mit $\gamma(0) \in X_0$ und $\gamma(1) \in S$. Wir betrachten

$$t_1 = \inf \{t \in I \mid \gamma([t, 1]) \subset S\}.$$

Nun ist $S = X \cap \{x > 0\}$ als Schnitt mit einer offenen Menge in \mathbb{R}^2 relativ offen in X . Zusammen mit der Stetigkeit von γ folgt

$$\gamma((t_1, 1]) \subset S \quad \text{und} \quad \gamma(t_1) \in X_0.$$

Für $t \in (t_1, 1)$ gilt

$$\gamma(t) = (\gamma_x(t), \sin(1/\gamma_x(t)))$$

und Stetigkeit liefert $\lim_{t \rightarrow t_1} \gamma_x(t) = 0$. Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ existiert bekanntermaßen nicht. Somit kann γ nicht stetig in t_1 sein.

Die Wegkomponenten von X : Aus den Definitionen ist sofort klar, dass S und X_0 wegzusammenhängend sind. Da kein Punkt aus S mit keinem Punkt aus X_0 durch einen stetigen Weg verbunden werden kann (siehe oben), müssen S und X_0 die Wegkomponenten von X sein. Wie bereits gesehen ist S offen in X , folglich ist $X_0 = X \setminus S$ abgeschlossen in X . Allerdings ist S nicht abgeschlossen, da $\bar{S} \neq S$, und genau so wenig ist X_0 offen. Denn jeder Euklidische Ball um einen Punkt in X_0 enthält notwendigerweise auch Punkte aus S . Folglich müssen Wegkomponenten weder offen noch abgeschlossen sein.

4.1.2 Offenheit von Komponenten. Lokal zusammenhängende Räume.

Wir haben bereits gesehen, dass die Komponenten eines Raums X immer abgeschlossene Teilmengen sind.

Beispiel 4.1.2. Falls X nur endlich viele Komponenten Z_1, \dots, Z_n hat, sind diese auch offen, denn $X \setminus Z_i = \cup_{j \neq i} Z_j$ ist als Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen.

Was allerdings wenn X unendlich viele Komponenten hat? Hier ein einfaches Beispiel:

Beispiel 4.1.3. Die Menge $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ ist als Unterraum von \mathbb{R} völlig unzusammenhängend, in dem Sinne, dass alle einpunktigen Mengen $\{1/n\}$ und $\{0\}$ Komponenten sind. Das folgt als der Beobachtung, dass $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ als Unterraum von \mathbb{R}^2 diskret ist. Daraus folgt auch, dass $\{1/n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ offen in X ist. Allerdings ist $\{0\}$ nicht offen, da jedes offene Intervall um 0 auch ein Element aus $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ enthält.

Hier eine nützlichen Bedingung, die die Offenheit von Komponenten garantiert.

Definition 4.1.4. Ein Raum X heißt *lokal zusammenhängend* wenn es für jedes $x \in X$ und jede Umgebung N von x eine Umgebung V von x gibt, die als Unterraum von X zusammenhängend ist.

Lemma 4.1.5. Sei X lokal wegzusammenhängend. Dann sind alle Komponenten von X offen.

Beweis. Sei $Z \subset X$ eine Komponente und $x \in Z$. Da X lokal wegzusammenhängend ist, gibt es insbesondere eine zusammenhängende Umgebung $V \subset X$ von N . Da jeder Punkt in genau einer Komponente liegt, und jede zusammenhängende Teilmenge in einer Komponente enthalten ist, muss $V \subset Z$ gelten. Insbesondere ist Z eine Umgebung von x und, da $x \in Z$ beliebig war, ist Z als Umgebung all seiner Punkte offen (siehe Aufgabe 1.2). \square

4.1.3 Quotienten und Produkte zusammenhängender Räume

Die besprochenen Beispiele zeigen, dass Unterräume zusammenhängender Räume keinesfalls zusammenhängend sein müssen. Für Quotienten und Produkte sieht die Sache hier besser aus: beliebige Quotienten und Produkte (weg-)zusammenhängender Räume sind wieder (weg-)zusammenhängend. Anders gesagt: Zusammenhangseigenschaften „vererben“ sich auf Produkte und Quotienten, jedoch nicht auf Unterräume. Derartige Erbschaftsfragen werden sich noch häufiger Stellen. Quotienten sind in Bezug auf Zusammenhang am einfachsten zu verstehen.

Lemma 4.1.6. Sei X (weg-)zusammenhängend und \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Dann ist der Quotientenraum X/\sim (weg-)zusammenhängend.

Beweis. Per Konstruktion ist die Quotientenabbildung $\pi: X \rightarrow X/\sim$ surjektiv und stetig. Falls X zusammenhängend ist, ist X/\sim nach [Bre93, I.4.6] ebenfalls zusammenhängend. Falls X wegzusammenhängend ist, lassen sich Punkte in X/\sim paarweise durch stetige Wege verbinden, indem man Urbilder unter π wählt, diese durch einen Weg verbindet, und letzteres mit π komponiert. \square

Produkte sind etwas schwieriger zu verstehen.

Lemma 4.1.7. Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie nicht leerer Räume. Eine Abbildung $f: Z \rightarrow \times_{i \in I} X_i$ ist genau dann stetig, wenn die Kompositionen $p_i \circ f: Z \rightarrow X_i$ für alle $i \in I$ stetig sind.

Satz 4.1.8. Produkte nichtleerer zusammenhängender Räume sind zusammenhängend.

Beweis. Wir gehen Schritt für Schritt vor und behandeln zunächst einfache Produkte, dann endliche Produkte und schließlich beliebige Produkte.

Einfache Produkte: Seien X und Y zwei zusammenhängende Räume. Um zeigen dass das kartesische Produkt $X \times Y$ zusammenhängend ist, betrachten wir die Komponente Z_0 eines fest gewählten Punktes $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Für beliebige $(x, y) \in X \times Y$ gilt dann:

- (x, y) und (x_0, y) liegen in der Teilmenge $X \times \{y\}$
- (x_0, y) und (x_0, y_0) liegen in der Teilmenge $\{x_0\} \times Y$

Man sieht leicht, dass die Unterräume $X \times \{y\}$ und $\{x_0\} \times Y$ homöomorph zu X , bzw. Y , und somit zusammenhängend sind. Es folgt, dass (x, y) und (x_0, y_0) in der selben Komponente von $X \times Y$ liegen. Da (x, y) beliebig war, gilt $X \times Y = Z_0$. Insbesondere ist $X \times Y$ zusammenhängend.

Endliche Produkte: OBdA sei $I = \{1, \dots, n\}$ und $X = X_1 \times \dots \times X_n$ das gewöhnlichen Produkt. Für $n > 1$ haben wir einen kanonischen Homöomorphismus

$$X_1 \times \dots \times X_n \approx (X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n.$$

Per Induktion nach n erhält man nun, dass $X_1 \times \dots \times X_n$ zusammenhängend ist.

Beliebige Produkte: Sei nun $\{X_i\}_{i \in I}$ eine beliebige Familie nicht leerer, zusammenhängender Räume. Für $x \in X = \times_{i \in I} X_i$ sei $x_i = p_i(x) \in X_i$. Für eine endliche Teilmenge $E \subset I$ sei

$$X_{E,x} = \{y \in X \mid \forall i \notin E: y_i = x_i\} \subset X.$$

Es ist nicht schwer, zu sehen, dass $X_{E,x}$ zusammen mit den Einschränkungen der Projektionen $p_i, i \in E$, ein Produkt der endlichen Familie $\times_{i \in E} X_i$ ist. Insbesondere ist $X_{E,x}$ für alle Wahlen von E und x als endliches Produkt zusammenhängend. Nun sei für festes x

$$Z = \bigcup_{E \subset I \text{ endlich}} X_{E,x}.$$

Da alle Mengen $X_{E,x}$ den Punkt x enthalten, ist Z als Unterraum von X nach [Bre93, I.4.7] zusammenhängend. Wir zeigen nun:

Beh: Z liegt dicht in X , das heißt $X = \bar{Z}$

Als Abschluss einer zusammenhängenden Teilmenge ist X dann zusammenhängend. Um die Behauptung zu beweisen, erinnern wir uns an die Beschreibung

$$\bar{Z} = \{x \in X \mid \forall U \subset X \text{ offen: } x \in U \Rightarrow U \cap Z \neq \emptyset\}.$$

Die Aussage $X = \bar{Z}$ bedeutet also nicht anderes, als dass jede nicht leere, offene Teilmenge von X nicht leeren Schnitt mit Z hat. Eine Basis der Produkttopologie ist per Definition gegeben durch Mengen der Form

$$\tilde{U} = \bigcap_{i \in E} p_i^{-1}(U_i)$$

wobei $E \subset I$ endlich ist und $U_i \subset X_i$ für jedes $i \in E$ offen ist. Offensichtlich ist der Durchschnitt

$$\tilde{U} \cap X_{E,x} = \{x \in X_{E,x} \mid \forall i \in E: x_i \in U_i\}$$

nicht leer sofern alle U_i nicht leer sind. Beliebige offene Teilmengen von X sind Vereinigungen von Mengen der Form \tilde{U} und haben somit ebenfalls nicht leeren Schnitt mit Z sofern sie nicht leer sind. \square

4.2 Donnerstag, 14. Mai

4.2.1 Trennungseigenschaften

Geometrische Objekte könnte man vage als “*zusammenhängende Gebilde mit interner Struktur*” beschreiben. Die interne Struktur sollte dabei gewährleisten, dass man verschiedene Punkte und/oder Bereiche des jeweiligen Objekts voneinander unterscheiden kann. Letzteres wird durch sogenannte Trennungseigenschaften realisiert, die in metrischen Räumen wie selbstverständlich gelten. Extreme Beispiele sind wie immer:

Diskrete Räume: Völlig unzusammenhängende Punkthaufen.

Räume mit trivialer Topologie: Klumpen ohne interne Struktur.

Diskreten Räumen fehlt es an Zusammenhang und trivialen Räumen fehlt es an Trennung. Die eigentliche Herausforderung liegt darin, eine Balance zu finden.

Die Definitionen der Trennungseigenschaften T_0, T_1, T_2 (Hausdorff), T_3 (regulär) und T_4 (normal) sind in [Bre93, Def. I.5.1] nachzulesen. Bilder zur Veranschaulichung findet man auf der virtuellen Tafel zur Sitzung. Es gelten offensichtlich die Implikationen

$$T_4 \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0,$$

allerdings gilt im Allgemeinen *keine* der Umkehrungen. Wir zeigen zunächst, dass metrische Räume normal sind.

Lemma 4.2.1 ([Bre93, I.5, Problem 9]). *Sei X ein metrischer Raum.*

- (i) *Für jeden Punkt $x \in X$ ist die Einpunktmenge $\{x\} \subset X$ abgeschlossen.*
- (ii) *Seien $A, B \subset X$ disjunkt und abgeschlossen. Dann gibt es disjunkte offene Teilmengen $U, V \subset X$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$.*

Mit anderen Worten: metrische Räume sind normal.

Beweis. Für (i) sei $x \in X$ gegeben und $y \neq x$. Für $0 < \varepsilon < d(x, y)$ gilt dann $B_\varepsilon(y) \subset X \setminus \{x\}$, so dass $X \setminus \{x\}$ offen und somit $\{x\}$ abgeschlossen in X ist. Für (ii) seien $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Dann ist $X \setminus B$ offen und es gilt $A \subset X \setminus B$. Folglich gibt es für jedes $a \in A$ ein $\varepsilon_a > 0$, so dass $B_{2\varepsilon_a}(a) \subset X \setminus B$, und analog für $b \in B$ ein $\varepsilon_b > 0$ mit $B_{2\varepsilon_b}(b) \subset X \setminus A$. Betrachte nun die Mengen

$$U = \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon_a}(a) \quad \text{und} \quad V = \bigcup_{b \in B} B_{\varepsilon_b}(b).$$

Als Vereinigung offener Mengen sind U und V offen und per Konstruktion gilt $A \subset U$ und $B \subset V$. Um zu zeigen, dass U und V disjunkt sind, seien $a \in A$ und $b \in B$ gegeben. Nach Wahl von ε_a und ε_b gilt dann

$$d(a, b) > 2 \max\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}$$

Sei nun $z \in B_{\varepsilon_a}(a)$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass z nicht in $B_{\varepsilon_b}(b)$ liegen kann. Falls $\varepsilon_a \geq \varepsilon_b$, so erhalten wir mit der Dreiecksungleichung

$$2\varepsilon_a \leq d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b) < \varepsilon_a + d(z, b)$$

und somit insbesondere $d(z, b) \geq \varepsilon_b$. Der Fall $\varepsilon_a \leq \varepsilon_b$ folgt mit einer ähnlichen Abschätzung. \square

Interpretation der Trennungseigenschaften. Die Eigenschaften T_0 und T_1 sind intuitiver als sie auf Anhieb wirken. Die Eigenschaften T_3 und T_4 sind eher analytischer als geometrischer Natur, die wichtigste Eigenschaft T_2 ist ein Mittelding.

- T_0 : Umgebungen *unterscheiden* Punkte ($x \neq y \Leftrightarrow \mathcal{N}(x) \neq \mathcal{N}(y)$)
- T_1 : Umgebungen *bestimmen* Punkte ($\{x\} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}(x)} N$)
- T_2 : "Grenzwerte sind eindeutig" (siehe nächstes Mal)
- T_3, T_4 : Haben mit der Existenz stetiger Funktionen zu tun (siehe [Bre93, I.10]).

Beispiel 4.2.2.

- Räume mit der trivialen Topologie, die mehr als einen Punkt enthalten, erfüllen nicht einmal T_0 , da die einzige nicht-leere offene Menge, der ganze Raum, immer alle Punkte enthält.
- Diskrete Räume erfüllen trivial T_4 , da jede abgeschlossene Teilmenge eine offene Umgebung von sich selbst ist.
- Etwas interessanter: auf der Menge $\mathcal{L}^1([0, 1])$ der integrierbaren Funktionen auf $[0, 1]$ ist durch

$$p(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

eine sogenannte *Pseudometrik* gegeben, d.h. fast alle Eigenschaften einer Metrik sind erfüllt, aus $p(f, g) = 0$ folgt lediglich nicht zwingend $f = g$. Metrische Bälle und eine davon erzeugt Topologie lässt sich wie mit einer Metrik definieren. Allerdings gilt die T_0 Eigenschaft nicht. Gilt nämlich $f(x) = 0$ für alle bis auf endlich viele x , so gilt $p(f, 0) = 0$, so dass f in jeder offenen Umgebung der Nullfunktion enthalten ist.

- Beispiele für T_0 -Räume, die nicht T_1 sind, findet man in der algebraischen Geometrie. Für einen kommutativen Ring R mit 1 definiert man das *Spektrum* $\text{Spec}(R)$ als Menge aller Primideale in R mit der *Zariski Topologie*. Die offenen Mengen haben alle die Form

$$U(I) = \{P \in \text{Spec}(R) \mid I \not\subseteq P\}$$

wobei $I \subset R$ ein beliebiges Ideal ist.

- Ein doppelt kuriose Beispiel ist die sogenannte "*Gerade mit Doppelnull*". Formal ist sie definiert als Quotient von $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\} \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$(a, 0) \sim (a, 1) \quad \text{für alle } a \neq 0.$$

Ein bildliche Veranschaulichung findet man auf der virtuellen Tafel zur Sitzung. Der Quotient $L = X / \sim$ ist ein T_1 -Raum, der nicht Hausdorff ist. Sei $\pi: X \rightarrow L$ die Quotientenabbildung. Die T_1 -Eigenschaft folgt aus der Beobachtung für $(a, i) \in X$

$$\pi^{-1}(L \setminus \{(a, i)\}) = \begin{cases} X \setminus (\{a\} \times \{0, 1\}), & a \neq 0 \\ X \setminus \{(0, i)\}, & a = 0. \end{cases}$$

Da endliche Mengen in X abgeschlossen sind, ist die Menge rechts in jedem Fall offen. Insbesondere ist jede Einpunktmenge $\{(a, i)\}$ in L abgeschlossen. Die Hausdorff-Eigenschaft scheitert an den zwei Punkten $[0, 0] \neq [0, 1]$. Sind nämlich $U, V \subset L$ beliebige offene Umgebungen jeweils eines dieser Punkte, so überzeugt man sich leicht, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\} \subset \pi^{-1}(U) \quad \text{und} \quad (-\varepsilon, \varepsilon) \times \{1\} \subset \pi^{-1}(V).$$

Folglich gilt $U \ni [\varepsilon/2, 0] = [\varepsilon/2, 1] \in V$ und somit $U \cap V \neq \emptyset$. Dieses Beispiel wird uns in einigen Wochen noch einmal beschäftigen.

5 Woche 5

5.1 Dienstag, 19. Mai

5.1.1 Konvergenz in topologischen Räumen.

Der bekannte Konvergenzbegriff für Folgen in metrischen Räumen lässt sich gleich doppelt verallgemeinern, zur Konvergenz von sogenannten Netzen in topologischen Räumen.

Konvergenz von Folgen. Sei zunächst $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum X . Die Folge heißt bekanntermaßen *konvergent* gegen $x \in X$ falls die altbekannte Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : x_n \in B_\varepsilon(x)$$

erfüllt ist. Äquivalent könnte man auch schreiben

$$\forall N \in \mathcal{N}(x) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : x_n \in N.$$

Die letzte Bedingung hat den Vorteil, keinen expliziten Bezug mehr zur Metrik zu haben. Tatsächlich liefert sie einen sinnvollen Konvergenzbegriff für Folgen in beliebigen topologischen Räumen. Wie sich herausstellt, sind Folgen allerdings zu “schwach”, um in beliebigen Räumen alles zu sehen, was sie in metrischen Räumen sehen.

Gerichtete Mengen und Netze. Folgen in einem Raum X lassen sich mit Abbildungen $\mathbb{N} \rightarrow X$ identifizieren. Der Konvergenzbegriff benutzt darüberhinaus die Ordnungsrelation \leq auf \mathbb{N} . Die relevanten Eigenschaften dieser Relation sind wie folgt:

- (1) $x \leq x \quad \forall x$
- (2) $x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- (3) $\forall x, y \quad \exists z : x \leq z \wedge y \leq z$

Ein Menge D zusammen mit einer Relation \leq mit diesen Eigenschaften nennt man eine *gerichtete Menge* (vgl. [Bre93, I.6.1]) und eine Abbildung $\Phi: D \rightarrow X$ heißt *Netz* in X (vgl. [Bre93, I.6.2]). Dieses heißt schließlich *konvergent* gegen $x \in X$ (vgl. [Bre93, I.6.4]) falls

$$\forall N \in \mathcal{N}(x) \quad \exists \alpha_0 \in D \quad \forall \beta \geq \alpha_0 : \Phi(\beta) \in N.$$

In Anlehnung an die für Folgen übliche Notation schreibt man auch häufig $\Phi(\alpha) = x_\alpha$ und bezeichnet das Netz Φ mit $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$.

Achtung! Zweierler. Zum einen hat das Zeichen \leq hier je nach Zusammenhang eine andere Bedeutung. Hier muss man als Leser etwas aufpassen. Zum anderen sei darauf hingewiesen, dass Bredon implizit zusätzlich die Eigenschaft fordert, dass aus $x \leq y$ und $y \leq x$ immer $x = y$ folgt. Diese Bedingung gilt zwar in allen im Buch auftretenden Situationen, sie ist aber weder nötig noch wird sie benutzt.

Beispiele gerichteter Mengen. Neben den natürlichen Zahlen sind Potenzmengen Beispiele für gerichtete Mengen. Ist nämlich X eine beliebige Menge, so erfüllen sowohl die Teilmengenrelation \subset als auch die Obermengenrelation \supset die drei genannten Eigenschaften. Für die letzte Eigenschaft benötigt man $A, B \subset A \cup B$ und $A, B \supset A \cap B$. Die wichtigsten Beispiele für die abstrakte Topologie sind allerdings gewisse Teilmengen von Potenzmengen, die abgeschlossen unter (endlicher) Durchschnittsbildung ist. Hier ein Beispiel: für einen topologischen Raum X sei

$$\mathcal{T}(x) = \{U \subset X \mid U \text{ offen, } x \in U\}$$

die Menge der offenen Umgebungen von $x \in X$. Diese wird mit der Relation

$$U \leq U' \iff U' \subset U$$

zur gerichteten Menge. Man beachte hier die Reihenfolge: die Bedingung $U \leq U'$ bedeutet hier, dass U' enger um x liegt.

Beispiele von Netzen. Wie bereits beschrieben sind Netze im Spezialfall der gerichteten Menge (\mathbb{N}, \leq) nichts anderes als Folgen und der Konvergenzbegriff ist in metrischen Räumen der übliche.

Ein weiteres bekanntes Beispiel sind die kontinuierlichen Grenzwerte $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$ einer Abbildung $f: J \rightarrow X$ aus einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in J$. Hierbei betrachtet man auf J die Relation

$$s \leq_{t_0} t \iff |t - t_0| \leq |s - t_0|,$$

die besagt, dass t näher an t_0 liegt als s . Fasst man f als Netz in X auf, so ist $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$ nichts anderes als der Netzlimes bezüglich der Relation \leq_{t_0} .

Beispiele von Netzen, die auf Mengensystemen basieren findet man in den Beweisen von Proposition I.6.5, I.6.6 und I.6.7, die allesamt bekannte Aussagen für Folgen in metrischen Räumen auf Netze in topologischen Räumen verallgemeinern.

Warum überhaupt Netze? Laut [Bre93, I.6.5] ist die Hausdorff-Eigenschaft dadurch charakterisiert, dass konvergente Netze eindeutige Grenzwerte haben. Tatsächlich reicht es nicht, dass nur konvergente *Folgen* eindeutige Grenzwerte haben.

Beispiel 5.1.1. Sei X eine überabzählbare Menge mit folgender Topologie:

$$U \subset X \text{ offen} : \iff X \setminus U \text{ höchstens abzählbar}$$

Anders gesagt: die abgeschlossenen Mengen sind genau die höchstens abzählbaren Teilmengen. Insbesondere ist X ein T_1 -Raum, da einpunktige Teilmengen abgeschlossen sind. Allerdings ist X nicht Hausdorff, da für nicht-leere offene Teilmengen $U, V \subset X$

$$X \setminus (U \cap V) = \underbrace{(X \setminus U) \cup (X \setminus V)}_{\text{abzählbar}} \neq X$$

und somit $U \cap V = \emptyset$ gilt. Nun stellt sich heraus, dass trotzdem jede konvergente Folge in X einen eindeutigen Grenzwert hat.

Sei nämlich (x_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert $x \in X$. Dann ist die Menge

$$C = \{x_n \mid x_n \neq x\} \subset X$$

abzählbar und somit abgeschlossen. Offensichtlich gilt $x \in X \setminus C$, so dass $X \setminus C$ eine offene Umgebung von x ist. Die Konvergenz garantiert dann ein n_0 , so dass $x_n \in X \setminus C$, also $x_n = x$, für alle $n \geq n_0$. Anderes gesagt die Folge ist ab einen gewissen Schwellwert konstant x .

Nun könnte man meinen, man wäre fertig, da konstante Folgen sicherlich immer nur einen Grenzwert hätten. Aber weit gefehlt! Hierzu ist tatsächlich die T_1 -Eigenschaft nötig. Andernfalls könnte es Punkte $y \in X$ geben, die in jeder Umgebung von x liegen, und die dann ebenfalls Grenzwert der konstanten Folge x, x, x, \dots wären. T_1 garantiert aber für jedes $x \neq y$ eine Umgebung von x , die y nicht enthält. Wir sehen, Konvergenz ist ohne T_1 ein ziemlich schwammiges Konzept.

Fazit: Folgen können in allgemeinen topologischen Räumen nicht alles, was sie können sollten. Sie sind gewissermaßen zu kleine Werkzeuge. Netze haben eine größere Durchschlagskraft.

Kern des Problems: Es stellt sich allerdings heraus, dass Folgen stark genug sind, so lange man mit Räumen arbeitet, in denen alle Punkte abzählbare Umgebungsbasen besitzen (siehe Übungsblatt 5).

5.1.2 Erbfragen bei Trennung

Hier eine kurze Übersicht, wie sich die Trennungseigenschaften unter Bildung von Unterräumen, Produkten und Quotienten verhält.

Unterräume. Trennungseigenschaften vererben sich in der Regel gut auf Unterräume.

Q: Sei X ein T_i -Raum für $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $A \subset X$ ein Unterraum. Ist A dann auch ein T_i -Raum?

- Ja für T_0, T_1 und T_2 (Hausdorff). Dies folgt sofort aus den Definitionen.
- Ja für T_3 (regulär). Einen Beweis findet man in [Bre93, I.5.3].
- Für T_4 ist die Frage subtiler. Falls A abgeschlossen in X ist, ist die Antwort positiv und der Beweis trivial. Im allgemeinen sind Unterräume normaler Räume allerdings nicht normal. Ein wirklich ärgerliches Gegenbeispiel findet man in [Bre93, I.17.5, S. 59 f.].

Produkte. Für Produkträume sieht die Sache ähnlich aus

Q: Sei $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von T_i -Räumen. Ist das Produkt $\times_{\alpha \in A} X_\alpha$ ebenfalls ein T_i -Raum?

- Ja für T_0, T_1 und T_2 (Hausdorff). Wieder folgt diese sofort aus den Definitionen.
- Ja für T_3 (regulär). Dies lässt sich leicht mit Hilfe von [Bre93, I.5.2] beweisen.
- Für T_4 ist die Frage wieder subtiler. Zum Beispiel kann man zeigen, dass das \mathbb{R} -fache Produkt $[0, 1]^{\mathbb{R}} = \times_{\alpha \in \mathbb{R}} [0, 1]$ des abgeschlossenen Einheitsintervalls normal ist (siehe nächste Woche), jedoch ist $(0, 1)^{\mathbb{R}}$ nicht normal.

Quotienten. Bei der Bildung von Quotienten kann einiges schief gehen. Als warnendes Beispiel betrachte man \mathbb{R} mit der Standardtopologie und die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad :\iff \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Der Quotient \mathbb{R}/\sim ist überabzählbar und trägt die triviale Topologie (Aufgabe!). Der Quotient macht also aus einem normalen Raum einen Raum, der nicht einmal T_0 erfüllt.

Fazit: Vorsicht bei Trennung in Quotienten!

5.1.3 Trennung in speziellen Quotienten.

Beispiel 5.1.2 (Reell projektive Räume). Der reell projektive Raum \mathbb{RP}^n ist definiert als Menge aller Ursprungsgeraden in \mathbb{R}^{n+1} . Formal lässt sich diese Menge beschreiben als

$$\mathbb{RP}^n = \{\mathbb{R} \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\}.$$

Offensichtlich haben wir eine surjektive Abbildung

$$\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}^n, \quad x \mapsto \mathbb{R} \cdot x$$

und wir versehen \mathbb{RP}^n mit der entsprechenden Quotiententopologie. Diese Topologie fängt die intuitive Vorstellung ein, dass Geraden durch naheliegende Punkte in \mathbb{R}^{n+1} auch als Punkte in \mathbb{RP}^n nahe beieinander liegen. Eine bildliche Veranschaulichung findet man auf der virtuellen Tafel zur Sitzung.

Wir wollen uns nun kurz überlegen, dass \mathbb{RP}^n ein Hausdorff-Raum ist. Vorweg etwas Notation: für die Gerade durch einen Punkt $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ schreibt man auch

$$[x] = [x_0 : x_1 : \dots : x_n] = \mathbb{R} \cdot x = \pi(x) \in \mathbb{RP}^n.$$

Die Doppelpunktnotation nennt man auch *homogene Koordinaten* der Gerade. Seien also $[x] \neq [y] \in \mathbb{RP}^n$ gegeben. OBdA seien $x, y \in S^n$ (d.h. $|x| = |y| = 1$). Wir wählen $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, dass die euklidischen Bälle

$$B_\varepsilon(x), B_\varepsilon(-x), B_\varepsilon(y), B_\varepsilon(-y) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

paarweise disjunkt sind und vollständig in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ liegen. Nun überzeugt man sich leicht, dass alle Paare von Vektoren $v \in B_\varepsilon(x)$ und $w \in B_\varepsilon(y)$ linear unabhängig sind, was zur Folge hat, dass die Mengen

$$U = \pi(B_\varepsilon(x)) \subset \mathbb{RP}^n \quad \text{und} \quad V = \pi(B_\varepsilon(y)) \subset \mathbb{RP}^n$$

disjunkt in \mathbb{RP}^n sind und $[x]$, bzw. $[y]$ enthalten. Ferner sieht man leicht, dass

$$\pi^{-1}(U) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cdot B_\varepsilon(x) = \bigcup_{\lambda \neq 0} \lambda \cdot B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

Anschaulich ist dies ein offener Kegel in \mathbb{R}^{n+1} um die Gerade durch x . Da die Skalarmultiplikation mit festem $\lambda \neq 0$ ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist, ist $\lambda \cdot B_\varepsilon(x)$ für jedes $\lambda \neq 0$, so dass $\pi^{-1}(U)$ als Vereinigung offener Mengen wieder offen ist. Dasselbe gilt für $\pi^{-1}(V)$. Damit ist die Hausdorff-Eigenschaft nachgewiesen.

Beispiel 5.1.3 (Kollabierte Unterräume, [Bre93, I.13.7]). Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Wir betrachten die Äquivalenzrelation

$$x \sim_A y \quad :\iff \quad x, y \in A,$$

deren Äquivalenzklassen genau die Einpunktengen $\{x\}$ mit $x \notin A$ und die Menge A selbst sind. Den Quotientenraum bezeichnen wir mit $X/A = X/\sim_A$. Die intuitive Vorstellung ist, dass X/A aus X entsteht, indem A kontinuierlich zu einem Punkt zusammengezogen wird (siehe Bilder auf virtueller Tafel).

Lemma ([Bre93, I.13.8]). *Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ abgeschlossen.*

(i) *Falls X regulär ist, ist X/A Hausdorff.*

(ii) *Falls X normal ist, ist X/A normal.*

Beweis. Wir beweisen nur (i), da der Beweis von (ii) ähnlich abläuft. Wir halten zunächst fest, dass die Quotientenabbildung

$$\pi: X \longrightarrow X/A$$

eingeschränkt auf $X \setminus A$ injektiv ist. Seien nun $[x] \neq [y] \in X/A$ gegeben und OBdA sei $y \notin A$.

Fall 1: $x \in A$. Die Regularität von X liefert disjunkte offene Mengen $\tilde{U}, \tilde{V} \subset X$ mit $A \subset U$ und $y \in V$. Man prüft leicht nach, dass $U = \pi(\tilde{U})$ und $V = \pi(\tilde{V})$ disjunkt in X/A sind und $[x]$, bzw. $[y]$ enthalten. Ferner gilt $\pi^{-1}(U) = \tilde{U}$ und $\pi^{-1}(V) = \tilde{V}$, sodass U und V offen in X/A sind.

Fall 2: $x \notin A$. Da X regulär ist, also insbesondere auch Hausdorff, finden wir disjunkte offene Mengen $\tilde{U}, \tilde{V} \subset X$ mit $x \in \tilde{U}$ und $y \in \tilde{V}$. Da A abgeschlossen in X ist, sind auch $\tilde{U} \setminus A$ und $\tilde{V} \setminus A$ offen in X . Deren Bilder $U = \pi(\tilde{U} \setminus A)$ und $V = \pi(\tilde{V} \setminus A)$ sind dann disjunkt in X/A und auch offen, da $\pi^{-1}(U) = \tilde{U} \setminus A$, was aus der Bijektivität von π auf $X \setminus A$ folgt.

□

5.2 Donnerstag, 21. Mai (Feiertag)

Keine Sitzung.

6 Woche 6

6.1 Dienstag, 26. Mai

6.1.1 Kompaktheit und Überdeckungen

Überdeckungen. Eine Menge von Teilmengen $\{U_i\}_{i \in I}$, $U_i \subset X$, heißt *Überdeckung* von X (bzw. von $A \subset X$) wenn

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{bzw.} \quad A \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Falls jede U_i offen ist, spricht man von einer *offenen Überdeckung*. Eine Teilüberdeckung ist eine Teilfamilie $\{U_j\}_{j \in J}$, $J \subset I$, die selbst eine Überdeckung ist (siehe [Bre93, I.7.1]).

Kompaktheit. Kompaktheit ist eine Bedingung an Familien offener Mengen.

Slogan: Jede offene Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung.

Kompaktheit lässt sich sowohl mit offenen als auch mit abgeschlossenen Mengen beschreiben. Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen eines Raums X . Dann ist $\{A_i = X \setminus U_i\}_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen. Der Raum X heißt *kompakt* wenn für alle solche Familien die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} (1) \quad \bigcup_{i \in I} U_i = X &\implies \bigcup_{i \in E} U_i = X \text{ für ein } E \subset I \text{ endlich} \\ (2) \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset &\implies \bigcap_{i \in E} A_i = \emptyset \text{ für ein } E \subset I \text{ endlich} \\ (3) \quad \bigcap_{i \in E} A_i \neq \emptyset &\text{ für alle } E \subset I \text{ endlich} \implies \bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset \end{aligned}$$

Bedingung (1) formalisiert den Slogan (siehe [Bre93, I.7.2]), die Äquivalenz zu (2) ist offensichtlich, und (3) ist nichts als die Kontraposition von (2) (vgl. [Bre93, I.7.4]).

Nützliche Konsequenzen von Kompaktheit. Kompaktheit macht das Leben in vieler Hinsicht leichter, insbesondere im Zusammenspiel mit der Hausdorff Eigenschaft. Die Beweise der folgenden Aussagen sind bei Bredon nachzulesen.

- Stetige Bilder kompakter Räume sind kompakt (\rightsquigarrow [Bre93, I.7.6]).
- Abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt (\rightsquigarrow [Bre93, I.7.7]).
- Kompakte Teilmengen von Hausdorff Räumen sind abgeschlossen (\rightsquigarrow [Bre93, I.7.5]).
- Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig. Falls X kompakt und Y ein Hausdorff Raum ist, ist f ein Homöomorphismus (\rightsquigarrow [Bre93, I.7.8]).

Vor allem die letzte Aussage ist in der Praxis extrem nützlich, da sie einem oft erspart, die Stetigkeit der Umkehrabbildung zu überprüfen.

Erbfragen für Kompaktheit (Übersicht). Kompaktheit vererbt sich auf...

- ... abgeschlossene Unterräume (\rightsquigarrow [Bre93, I.7.7]).
- ... beliebige Quotienten (\rightsquigarrow [Bre93, I.7.6]).
- ... beliebige Produkte (\rightsquigarrow [Bre93, I.8.4,5,9], mehr dazu nächstes Mal).

Allgemeine Unterräume sind in der Regel nicht kompakt. Denn wie gesehen sind kompakte Unterräume in Hausdorff Räumen automatisch abgeschlossen (\rightsquigarrow [Bre93, I.7.5]).

6.1.2 Kompaktheit in \mathbb{R}^n

Satz ([Bre93, I.7.9]). *Das Einheitsintervall $I = [0, 1]$ ist kompakt.*

Beweis. Sei $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von I . Wir betrachten die Teilmenge

$$S := \{s \in I \mid [0, s] \subset \cup_{\alpha \in E_s} U_\alpha \text{ mit } E_s \subset A \text{ endlich} \subset I\}$$

und setzen $b = \sup(S)$. Man sieht leicht, dass $b > 0$ und $[0, b) \subset S$. Es ist zu zeigen, dass einerseits $b \in S$ gilt und andererseits $b = 1$. Beide Argumente sind sehr ähnlich. Das Erste kann man bei Bredon nachlesen. Wir kümmern uns um $b = 1$.

Angenommen es gelte $b < 1$. Wir wählen ein $\beta \in A$ mit $b \in U_\beta$. Da U_β offen ist, gibt es $0 < a < b < c < 1$, so dass $[a, c] \subset U_\beta$. Da $a \in [0, b)$ gilt insbesondere $a \in S$, so dass $[0, a]$ durch endlich viele Überdeckungsmengen überdeckt wird. Allerdings gilt $[0, c] \subset [0, a] \cup U_\beta$ und somit auch $c \in S$, was ein Widerspruch zur Definition von $b = \sup S$ ist. Folglich gilt $b = 1$. \square

Da jedes abgeschlossene Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ homöomorph zu $[0, 1]$ ist, und Produkte kompakter Räume wieder kompakt sind (\rightsquigarrow [Bre93, I.8.5], nächstes Mal), ist insbesondere $[-m, m]^n \subset \mathbb{R}^n$ für alle $m, n \geq 0$ kompakt. Daraus folgert man leicht den bekannten Satz von Heine–Borel. Den Beweis kann man bei Bredon nachlesen.

Korollar (Heine–Borel, vgl. [Bre93, I.8.7]). *Eine Teilmenge von \mathbb{R}^n ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

6.1.3 Einige Beispiele kompakter Räume und Homöomorphismen

Beispiel 6.1.1. Der Satz von Heine–Borel liefert sofort ein Vielzahl an Beispielen kompakter Räume. Hier eine erste Auswahl:

$$\begin{aligned} D^n &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n \quad (\text{die } n\text{-dimensionale Scheibe}) \\ S^n &= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad (\text{die } n\text{-dimensionale Sphäre}) \\ T^n &= (S^1)^n \quad (\text{der } n\text{-dimensionale Torus}) \end{aligned}$$

Korrektur: Hier hatte sich ein ungünstiger Tippfehler eingeschlichen. Die Scheibe D^n lebt in \mathbb{R}^n und nicht in \mathbb{R}^{n+1} .

Beispiel 6.1.2 (vgl. [Bre93, I.13.6]). Die reellen projektiven Räume $\mathbb{R}P^n$ sind ebenfalls kompakt. Aus der Beschreibung als Quotient von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist dies allerdings nicht direkt ersichtlich, da $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ offensichtlich unbeschränkt und daher nicht kompakt ist. Um trotzdem mit Theorem I.7.6 argumentieren zu können nutzen wir die Tatsache, dass jede Ursprungsgerade in \mathbb{R}^{n+1} die Einheitskugel S^n in genau zwei gegenüberliegenden Punkten schneidet. Ferner liegt mindestens einer dieser Punkte auf der oberen Hemisphäre $S^n \cap \{x_{n+1} \geq 0\}$. Letztere ist homöomorph zur Einheitskugel via der Abbildung

$$u: D^n \longrightarrow S^{n+1}, \quad u(x) = (x, \sqrt{1 - |x|^2}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1},$$

die invers zur der Projektion auf die ersten n Koordinaten eingeschränkt auf $S^n \cap \{x_{n+1} \geq 0\}$ ist. Die Abbildung u und die Inklusion $i: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ liefern ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} D^n & \xrightarrow{u} & S^n & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi \\ D^n / \sim & \xrightarrow{g} & S^n / \sim & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}P^n. \end{array}$$

Hierbei ist die Äquivalenzrelation auf S^n gegeben durch $x \sim -x$, das heißt jeder Punkt wird mit dem Gegenüberliegenden identifiziert, während auf D^n nur $x \sim -x$ für alle $x \in S^{n-1}$

gefordert wird. Dies entspricht der Einsicht, dass $u(S^{n-1})$ genau den Äquator in S^n (die Punkte mit $x_{n+1} = 0$) beschreibt, wo Geraden die obere Hemisphäre in zwei gegenüberliegenden Punkten schneiden. Die Abbildungen f und g sind so gewählt, dass $f \circ \pi_1 = \pi \circ i$ und $g \circ \pi_2 = \pi_1 \circ u$ gelten. Man prüft leicht nach, dass es jeweils genau eine solche Abbildung gibt. Die Stetigkeit von f und g folgt dann mit dem einfachen Teil von [Bre93, I.13.5] aus der Stetigkeit von $\pi \circ i$ und $\pi_1 \circ u$, die jeweils offensichtlich ist. Die Äquivalenzrelationen und Abbildung sind letztendlich gerade so gewählt, dass f und g bijektiv sind. Nun ist allerdings S^n / \sim als Quotient eines kompakten Raums ebenfalls kompakt (\rightsquigarrow [Bre93, I.7.6]), und $\mathbb{R}P^n$ ist ein Hausdorff Raum (\rightsquigarrow Beispiel 5.1.2). Also greift [Bre93, I.7.8] und f ist ein Homöomorphismus. Ferner wissen wir nun, dass S^n / \sim als homöomorphe Kopie von $\mathbb{R}P^n$ ebenfalls ein Hausdorff Raum ist. Da D^n / \sim wieder kompakt ist, ist auch g ein Homöomorphismus.

Abschließend halten wir fest, dass wir $\mathbb{R}P^n$ als stetiges Bild der kompakten und zusammenhängenden Scheibe D^n dargestellt haben. Dementsprechend erbt $\mathbb{R}P^n$ diese Eigenschaften. Außerdem gewinnen wir die Anschauung, dass wir uns zum Beispiel $\mathbb{R}P^2$ als eine Scheibe vorstellen können, bei der gegenüberliegende Randpunkte identifiziert wurden.

Beispiel 6.1.3 (vgl. [Bre93, I.13.10]). In Beispiel 5.1.3 haben wir das Konzept des Kollabierens von Unterräumen kennengelernt. Als konkretes Beispiel identifizieren wir hier den Quotienten D^n / S^{n-1} mit S^n . Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\tilde{f}: D^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \left(\frac{2x(1-r)}{r^2+(1-r)^2}, \frac{r^2-(1-r)^2}{r^2+(1-r)^2} \right) & \text{falls } r = |x| < 1 \\ N = (0, \dots, 0, 1) & \text{falls } |x| = 1, \end{cases}$$

wobei $r = |x|$ und $N = (0, \dots, 0, 1)$ der *Nordpol* der Sphäre ist. Die obige Abbildung entsteht aus zwei anderen Abbildungen:

- Stereografische Projektion (mehr dazu später) liefert einen Homöomorphismus

$$\sigma_N: S^n \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \sigma_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

mit Inversem $\sigma_N^{-1}(y) = \frac{1}{1+|y|^2}(2y, 1 - |y|^2)$

- Die Abbildung $h: \text{int } D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$ ist ebenfalls ein Homöomorphismus mit Inversem $h^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$.

Man überzeugt sich leicht, dass die Komposition $\sigma_N^{-1} \circ h: \text{int } D^n \rightarrow S^n \setminus \{N\}$ eine Eindeutige stetige Fortsetzung auf D^n hat, die als Abbildung nach \mathbb{R}^{n+1} mit \tilde{f} übereinstimmt. Daraus lernen wir:

- \tilde{f} bildet D^n surjektiv und stetig auf S^n ab.
- \tilde{f} ist injektiv auf $\text{int } D^n$ und bildet $\partial D^n = S^{n-1}$ auf den Nordpol ab.

Folglich gibt es genau eine Abbildung $f: D^n / S^{n-1} \rightarrow S^n$, die das folgende Diagramm kommutativ macht

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}^{n+1} \\ \downarrow \pi & & \uparrow i \\ D^n / S^{n-1} & \xrightarrow{f} & S^n. \end{array}$$

Diese Abbildung f ist bijektiv, stetig und bildet den kompakten Raum D^n / S^{n-1} in den Hausdorff Raum S^n ab. Folglich ist f ein Homöomorphismus.

Was haben wir damit gewonnen? Bisher konnten wir nur S^1 sowohl als Unterraum als auch als Quotienten darstellen. Nun können wir dies für alle Sphären. Die Darstellung als Unterraum ist nützlich, um stetige Abbildungen *nach* S^n zu verstehen, während die Quotientendarstellung hilfreich ist, um stetige Abbildungen *aus* S^n heraus zu verstehen.

6.2 Donnerstag, 28. Mai

6.2.1 Kompaktheit von Produkten

Wir sind im Wesentlichen den Beweis des Satzes von Tychonoff durchgegangen.

Satz ([Bre93, I.8.5], Tychonoff endlich). *Seien X_1, \dots, X_n kompakte topologische Räume. Dann ist auch Produkt $X_1 \times \dots \times X_n$ kompakt.*

Der Satz folgt per Induktion aus dem Spezialfall $n = 2$ (\rightsquigarrow [Bre93, I.8.4]) Der Satz beruht auf folgendem Konzept:

Definition ([Bre93, I.7.12]). Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *eigentlich* (englisch: proper) falls Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.

Beispiel 6.2.1. (1) Falls X kompakt und Y Hausdorff ist, so ist jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ stetig. Denn kompakte Teilmengen von Y sind abgeschlossen (\rightsquigarrow [Bre93, I.7.5]), deren Urbilder unter f sind abgeschlossen in X und somit kompakt (\rightsquigarrow [Bre93, I.7.7]).

(2) Die Projektion $p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf die zweite Komponente $p_2(x, y) = y$ ist nicht eigentlich. Denn für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist $\{y\} \subset \mathbb{R}$ kompakt, aber $p_2^{-1}(y) = \mathbb{R} \times \{y\}$ ist unbeschränkt und somit nicht kompakt (\rightsquigarrow [Bre93, I.8.7]).

Der wesentliche Schritt im Beweis von Satz von Tychonoff für endliche Produkte ist dieser:

Satz ([Bre93, I.8.2&3]). *Sei X kompakt und Y beliebig. Dann ist die Projektion $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ abgeschlossen und eigentlich.*

Beweis. Die Abgeschlossenheit wird in [Bre93, I.8.2] direkt aus den relevanten Definitionen hergeleitet. Mit der Beobachtung, dass $X \times \{y\}$ als homöomorphe Kopie von X für jedes $y \in Y$ kompakt ist, folgt die Eigentlichkeit mit [Bre93, I.7.13]. Die Beweise der zitierten Sätze sollte jeder bei Bredon nachlesen und durcharbeiten! \square

Falls sowohl X als auch Y kompakt sind, ist einerseits die Projektion π_Y eigentlich. Da andererseits Y kompakt ist, ist dann auch das Urbild $\pi_Y^{-1}(Y) = X \times Y$ kompakt. Damit ist der Satz von Tychonoff für endliche Produkte bewiesen. Allgemeiner gilt:

Satz ([Bre93, I.8.9]). *Produkte $\times_{\alpha \in A} X_\alpha$ beliebiger Familien kompakter Räume X_α , $\alpha \in A$ sind kompakt.*

Den Beweis übergehen wir aus Zeitgründen. Der Fall endlicher Produkte ist für alles Weitere in dieser Vorlesung ausreichend. Interessierte können den Beweis bei Bredon nachlesen, der über sogenannte „universelle Netze“ läuft. Alternativ findet man einen ebenfalls gut nachvollziehbaren Beweis in dem Artikel [Che92].² In beiden Quellen wird bemerkt, dass der allgemeine Satz von Tychonoff äquivalent zum Auswahlaxiom ist. Dementsprechend fühlen sich die Beweis auch an.

Warum überhaupt? Der allgemeine Satz von Tychonoff ist für die mengentheoretische Topologie nicht nur historisch wichtig, sondern liefert auch strukturell tiefe Einsicht in die Welt der topologischen Räume. Tychonoff hat ursprünglich nur Produkte des Einheitsintervalls betrachtet. Um zu verstehen warum dies interessant sein könnte, betrachten wir einen nicht leeren, ansonsten zunächst beliebigen topologischen Raum X und die Menge $F = C(X, [0, 1])$ der stetigen Funktionen mit Werten in $[0, 1]$. Nach Tychonoff ist dann das Produkt $[0, 1]^F = \times_{f \in F} [0, 1]$ kompakt, und als Produkt von Hausdorff Räumen ebenfalls ein Hausdorff Raum. Da F mindestens die konstanten Funktionen enthält ist $[0, 1]^F$ nicht leer und wir haben eine Abbildung

$$\Phi: X \longrightarrow [0, 1]^F, \quad x \mapsto \Phi_x, \quad \Phi_x(f) = f(x)$$

²Der Artikel [Che92] mit Uni VPN online verfügbar: <https://doi.org/10.2307/2324485>

Hierbei benutzen wir das Standardmodell $[0, 1]^F = \text{Abb}(F, [0, 1])$ für Produkte. Über diese Abbildung kann man zeigen:

Satz ([Bre93, I.11.10]). *Falls X vollständig regulär ist (\rightsquigarrow [Bre93, I.9.5]), ist Φ eine Einbettung (siehe unten).*

Ein ähnlicher Satz ist eventuell schon aus der linearen Algebra bekannt: falls V ein Vektorraum über einem Körper \mathbf{k} ist, ist die Abbildung $V \rightarrow V^{**}$ in den Doppeldualraum, die einen Vektor v auf die Abbildung schickt, die ein lineares $\lambda: V \rightarrow \mathbf{k}$ auf $\lambda(v) \in \mathbf{k}$ abbildet, linear und injektiv. Die Bedingung der vollständigen Regularität garantiert die Existenz hinreichend vieler stetiger Funktionen $X \rightarrow [0, 1]$. Mehr dazu in der nächsten Sitzung.

6.2.2 Einbettungen

Eine Einbettung $f: X \rightarrow Y$ erlaubt es, den Raum X als Unterraum von Y aufzufassen. Die formale Definition findet man bei Bredon etwas versteckt in [Bre93, I.9.8]. Hier ist sie explizit:

Definition 6.2.2. Eine injektive, stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt (*topologische*) *Einbettung* falls die induzierte Abbildung $f: X \rightarrow f(X)$ ein Homöomorphismus ist, wobei $f(X)$ als Unterraum von Y topologisiert ist.

Die Abbildung \bar{f} ist eindeutig durch die Eigenschaft $\bar{f} = i \circ f$ charakterisiert, wobei $i: f(X) \rightarrow Y$ die Inklusion ist. Als Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow f & \uparrow i \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & f(X) \end{array}$$

De facto haben f und \bar{f} „die selbe“ Werte, nur einmal aufgefasst in Y und einmal in $f(X)$. Diese vermeintliche Überkomplikation ist allerdings für das formale Verständnis hilfreich.

Achtung! Falls f nur stetig und injektiv ist, muss \bar{f} kein Homöomorphismus sein. Ein Beispiel kennen wir bereits: die Abbildung $(0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$ aus [Beispiel 3.1.4](#).

Beispiel 6.2.3. Auf der virtuellen Tafel sieht man ein Bild einer etwas bizarren topologischen Einbettung $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dabei handelt es sich um einen sogenannten *wilden Knoten*, der unendlich oft mit sich selbst verschlungen ist (was auch immer das präzise heißen mag...). Dieses Beispiel deutet an, dass der Stetigkeitsbegriff selbst im Kontext von \mathbb{R}^3 eventuell noch etwas zu flexibel ist, um intuitive geometrische Phänomene zu formulieren. An dieser Stelle wird der Begriff der Differenzierbarkeit Abhilfe schaffen.

Unter gewissen Umständen sind injektive stetige Abbildungen automatisch Einbettungen. Das ist eine leichte Variation des „kompakt–Hausdorff“ Arguments aus [Bre93, I.7.8].

Lemma 6.2.4. *Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig und injektiv. Falls X kompakt und Y ein Hausdorff Raum ist, ist f eine Einbettung.*

Beweis. Die Abbildung $\bar{f}: X \rightarrow f(X)$ ist stetig und bijektiv. Da $f(X)$ als Unterraum von Y ein Hausdorff Raum ist, greift [Bre93, I.7.8]. \square

6.2.3 Topologische Summen

Topologische Summen sind abstrakte Versionen der Vereinigung von disjunkten Unterräumen. Das Konzept erlaubt es, beliebige Räume auf abstrakte Art und Weise „nebeneinander zu legen“. Eine formale Definition steht in [Bre93, I.8.11], eine etwas konzeptuellere Beschreibung, die auch die Analogie zum topologischen Produkt herausstellt, ist im Anhang A.1.4 gegeben.

Definition 6.2.5 (Topologische Summen, Standardmodell). Sei $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine beliebige Familie topologischer Räume. Das Standardmodell der *topologischen Summe* besteht aus folgenden Daten:

Grundmenge: $X_\alpha = \{(x_\alpha, \alpha) \mid \alpha \in A, x_\alpha \in X_\alpha\} = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \times \{\alpha\}$

Inklusionen: $j_\alpha: X_\alpha \longrightarrow X_\alpha, \quad j_\alpha(X_\alpha)$

Topologie $U \subset X_\alpha$ offen $:\iff j_\alpha^{-1}(U) \subset X_\alpha$ offen für alle $\alpha \in A$.

Folgende Eigenschaften weist man leicht nach (siehe Satz A.1.13):

- Es gilt $X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} j_\alpha(X_\alpha)$ und $j_\alpha(X_\alpha) \cap j_\beta(X_\beta) = \emptyset$ für $\alpha \neq \beta$.
- Die Inklusionen $j_\alpha: X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ sind stetig, offen und abgeschlossen.

Insbesondere sind die Inklusionen Einbettungen und verdienen somit ihren Namen.

Um die Summe $X + Y$ zweier Räume X und Y zu bilden wählen wir als Indexmenge immer $\{0, 1\}$, explizit:

$$X + Y = (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$$

Beispiel 6.2.6. (1) Für disjunkte Unterräume $A, B \subset X$ eines gegebenen Raums ist durch

$$A + B \longrightarrow A \cup B, \quad (a, 0) \mapsto a \in A, \quad (b, 1) \mapsto b \in B$$

ein Homöomorphismus gegeben. Dies rechtfertigt die Interpretation als abstrakte disjunkte Vereinigung.

(2) Die Summe $\mathbb{R} + \mathbb{R}$ ist homöomorph zu dem Unterraum $\mathbb{R} \times \{0, 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Genauso ist sie homöomorph zu disjunkten Geraden in \mathbb{R}^3 oder höherdimensionalen Euklidischen Räumen.

Das letzte Beispiel zeigt, dass es viele Modelle für die topologische Summe gibt. Eine ähnliche universelle Eigenschaft wie beim Produkt garantiert allerdings, dass alle Modelle kanonisch homöomorph sind (siehe A.1.4).

6.2.4 Ankleben von Räumen

Ausgelagert in Abschnitt 7.2.1

7 Woche 7

7.1 Dienstag, 2. Juni

7.1.1 Kompaktheit in metrischen Räumen

Kompaktheit in metrischen Räumen lässt sich ähnlich wie in \mathbb{R}^n charakterisieren.

Satz (vgl. [Bre93, I.9.4]). *Sei X ein metrischer Raum und $K \subset X$ ein Unterraum.*

- (1) K ist kompakt.
- (2) Jede Folge in K hat eine konvergente Teilfolge.
- (3) K ist vollständig und total beschränkt.

Beweis. Es genügt, den Fall $K = X$ zu betrachten, der in [Bre93, I.9.4] zu finden ist. \square

Hierbei heißt $K \dots$

... vollständig falls jede Cauchy Folge in K konvergiert (\rightsquigarrow [Bre93, I.9.2&3]).

... total beschränkt falls K für jedes $\varepsilon > 0$ durch endlich viele ε -Bälle überdeckt werden kann. Anders gesagt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_1, \dots, x_n \in K : K \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$$

Die totale Beschränktheit ist nichts anderes als die Heine–Borel Eigenschaft aus [Bre93, I.7.2] für Überdeckungen durch metrischen Bälle. Falls X selbst vollständig ist, ist die Vollständigkeit von K äquivalent zur Abgeschlossenheit.

Achtung! Totale Beschränktheit ist stärker als einfache Beschränktheit. In \mathbb{R}^n sind sie zwar äquivalent, aber davon sollte man sich nicht täuschen lassen.

7.1.2 Metrisierbarkeit

Zu Beginne der Vorlesung hatten wir mit metrischen Räumen begonnen, um sie zu topologischen Räumen zu verallgemeinern. Nachdem wir nun die wesentlichen Begrifflichkeiten der Topologie kennengelernt haben, gehen wir nun der Frage nach, ob und wenn ja welche topologische Eigenschaften die Existenz einer Metrik garantieren.

Definition 7.1.1. Ein topologischer Raum X heißt *metrisierbar* wenn die Topologie durch eine Metrik induziert werden kann, das heißt falls es eine Metrik auf X gibt, deren ε -Bälle eine Basis der Topologie bilden.

Es gibt viele sogenannte *Metrisierungssätze*, die hinreichenden oder äquivalente Bedingungen für Metrisierbarkeit geben. Wir besprechen einen nützlichen Klassiker.

Satz (Metrisierungssatz von Urysohn [Bre93, I.9.10]). *Sei X ein vollständig regulärer Raum mit abzählbarer Basis der Topologie. Dann ist X metrisierbar.*

Die zentrale Rolle spielt eine weitere Trennungseigenschaft, die irgendwo zwischen regulär (T_3) und normal (T_4) liegt.

Definition ([Bre93, I.9.5]). Ein Hausdorff Raum X heißt *vollständig regulär* ($T_{3,5}$) falls es für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ und jeden Punkt $x \in X \setminus A$ eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$ gibt, so dass $f|_A \equiv 1$ und $f(x) = 0$. Man sagt auch *f trennt A von x* .

Offensichtlich impliziert vollständige Regularität gewöhnliche Regularität. Ist nämlich f eine trennende Funktion für A und x , so sind durch

$$A \subset f^{-1}\left(\left(\frac{2}{3}, 1\right)\right) \quad \text{und} \quad x \in f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{3}\right)\right)$$

disjunkte offene Umgebungen in X gegeben.

Definition. Wir nennen eine Familie $\mathcal{F} \subset C(X, [0, 1])$ stetiger Funktionen *trennend* falls es für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ und jeden Punkt $x \in X \setminus A$ ein $f \in \mathcal{F}$ gibt, so dass $f|_A \equiv 1$ und $f(x) = 0$.

Der in [Bre93, I.9] gegebene Beweis von Urysohns Satz hat drei wesentliche Komponenten:

- (1) Sei X vollständig regulär und $\mathcal{F} \subset C(X, [0, 1])$ trennend. Dann gibt es eine Einbettung $\Phi: X \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{F}}$ (\rightsquigarrow [Bre93, I.9.8]).
- (2) Sei X vollständig regulär mit abzählbarer Basis der Topologie. Dann gibt es eine abzählbare trennende Familie $\mathcal{F} \subset C(X, [0, 1])$. (\rightsquigarrow [Bre93, I.9.9]).
- (3) Sei \mathcal{F} abzählbar. Dann ist $[0, 1]^{\mathcal{F}}$ metrisierbar (\rightsquigarrow [Bre93, I.9.6&7]).

Die Einbettung aus (1) angewandt auf die trennende Familie aus (2) liefert dann zusammen mit einer Metrik aus (3) eine Metrik auf X .

Zum Beweis von (3). Die Aussage gilt allgemeiner für abzählbarer Produkte metrischer, bzw. metrisierbarer Räume.

Lemma 7.1.2 (vgl. [Bre93, I.9.6&7]). *Abzählbare Produkte metrisierbarer Räume sind metrisierbar.*

Beweis (Skizze): Es genügt eine durch die natürlichen Zahlen indizierte Familie $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ metrisierbarer Räume zu betrachten. Sei d_n eine Metrik für X_n . Dann ist durch

$$d'_n(x_n, y_n) = \begin{cases} d_n(x_n, y_n), & d_n(x_n, y_n) \leq \frac{1}{2} \\ 1, & d_n(x_n, y_n) > \frac{1}{2} \end{cases}$$

ebenfalls eine Metrik gegeben, die dieselbe Topologie auf X_n induziert. Für $x, y \in \times_{n \in \mathbb{N}} X_n$ konvergiert dann die Reihe

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d'_i(x_i, y_i)}{2^i},$$

da jedes d'_n nur Werte in $[0, 1]$ annimmt. Die Metrikeigenschaften für d folgen leicht aus denen der d'_n . Der Nachweis, dass d die Produkttopologie induziert ist bei Bredon nachzulesen. \square

Zum Beweis von (2). Die Aussage ist etwas verwoben in [Bre93, I.9.9] enthalten. Der Beweis ist eine ziemlich geradlinige Ausnutzung einer abzählbaren Basis. Sei X vollständig regulär und \mathcal{S} eine abzählbare Basis der Topologie. Für Paare $U, V \in \mathcal{S}$ mit $\bar{U} \subset V$ wählt man, sofern existent, eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$ mit $f|_U \equiv 0$ und $f|_{X \setminus V} \equiv 1$. Die Menge \mathcal{F} dieser Funktionen ist dann höchstens abzählbar und Bredon argumentiert, dass sie für $X \neq \emptyset$ nicht leer und trennend ist.

Zum Beweis von (1). Dies ist der interessanteste Teil des Beweises. Die Idee ist uns schon am Ende von Abschnitt 6.2.1 begegnet. Sei $\mathcal{F} \subset C(X, [0, 1])$ eine trennende Familie von Funktionen auf X . Wir arbeiten mit dem Standardmodell des Produkts

$$[0, 1]^{\mathcal{F}} = \text{Abb}(\mathcal{F}, [0, 1]), \quad p_f: [0, 1]^{\mathcal{F}} \rightarrow [0, 1], \quad p_f(\xi) = \xi(f).$$

Die gesuchte Einbettung erhalten wir dann durch die *Auswerteabbildung*

$$\Phi: X \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{F}}, \quad \Phi(x)(f) = f(x).$$

Diese Konstruktion tritt bei Bredon gleich an zwei Stellen auf, einmal in [Bre93, I.9.8] und nochmals in [Bre93, I.11.10]. Wir fassen Sie wie folgt zusammen.

Lemma 7.1.3 (vgl. [Bre93, I.9.8, I.11.10]). *Sei X ein Hausdorff Raum und $\mathcal{F} \neq \emptyset$ eine trennende Familie. Dann ist die Auswerteabbildung $\Phi: X \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{F}}$ eine Einbettung.*

Beweis. Drei Dinge sind zu zeigen:

Φ ist stetig: Per Definition gilt für die Kompositionen mit den Projektionen

$$(p_f \circ \Phi)(x) = \Phi(x)(f) = f(x).$$

Da diese stetig sind, folgt die Stetigkeit von f aus Lemma A.1.9.

Φ ist injektiv: Da Einpunktmengen in X abgeschlossen sind, gibt es für $x \neq y$ ein $f \in \mathcal{F}$ mit

$$\Phi(x)(f) = f(x) = 0 \neq 1 = f(y) = \Phi(y)(f).$$

Folglich gilt $\Phi(x) \neq \Phi(y)$.

Φ ist ein Homöomorphismus auf $\Phi(X)$: Sei $C \subset X$ abgeschlossen. Es genügt, zu zeigen, dass $\Phi(C)$ abgeschlossen in $\Phi(X)$ ist. Wir argumentieren mit [Bre93, I.6.7] und betrachten ein Netz $\{x_\alpha\}$ in C , so dass $\{\Phi(x_\alpha)\}$ in $\Phi(X)$ gegen $\Phi(x)$ konvergiert. Da $[0, 1]^{\mathcal{F}}$ ein Hausdorff Raum und Φ injektiv ist, ist $x \in X$ eindeutig bestimmt. Angenommen es gelte $x \notin C$. Dann finden wir ein $f \in \mathcal{F}$ mit $f|_C \equiv 1$ und $f(x) = 0$. Nun gilt allerdings wie bereits bemerkt

$$f(x) = (p_f \circ \Phi)(x) = p_f(\lim \Phi(x_\alpha)) \stackrel{I.6.6}{=} \lim (p_f \circ \Phi(x_\alpha)) = \lim f(x_\alpha) = 0$$

wobei wir die Stetigkeit von p_f ausgenutzt haben. Dies ist aber ein Widerspruch zur Eindeutigkeit von Grenzwerten in Hausdorff Räumen. Folglich gilt $x \in C$ und $\Phi(C)$ ist abgeschlossen in $\Phi(X)$. □

Bemerkung. Für einen vollständig regulären Raum X ist die Familie $\mathcal{F} = C(X, [0, 1])$ aller stetiger Funktionen trennend. Den Abschluss des Bildes der entsprechenden Einbettung $\Phi: X \rightarrow [0, 1]^{C(X, [0, 1])}$ nennt man die *Stone–Weierstrass Kompaktifizierung* $\beta(X)$ von X . Tatsächlich ist $\beta(X)$ als abgeschlossener Unterraum des nach Tychonoff kompakten Produktraums $[0, 1]^{C(X, [0, 1])}$ wieder kompakt. Unter einer *Kompaktifizierung* eines Raumes X versteht man allgemeiner einen kompakten Raum \tilde{X} zusammen mit einer Einbettung $X \rightarrow \tilde{X}$ mit dichtem Bild. Die Stone–Weierstrass Kompaktifizierung wird im weiteren Verlauf keine große Rolle spielen, sie ist jedoch in anderen Bereichen der Mathematik durchaus wichtig. Mehr Details kann man in [Bre93, I.11, S. 34 f.] finden.

7.1.3 Normalität und Existenz stetiger Funktionen

Der Beweis des Metrisierungssatzes sollte gezeigt haben, dass stetige Funktionen nützliche Werkzeuge sein können. Nun ist die Existenz stetiger Funktionen allerdings eine etwas indirekte Bedingung an die Topologie eines Raumes, und im Gegensatz zu dem, was einem \mathbb{R}^n vorgaukelt, für abstrakte topologische Räume keine Selbstverständlichkeit. An dieser Stelle entfaltet die Trennungseigenschaft der Normalität (T_4) ihre Wirkung.

Das Lemma von Urysohn. Das Lemma von Urysohn garantiert die Existenz gewisser „Abschneidefunktionen“ auf normalen Räumen.

Satz (Lemma von Urysohn, [Bre93, I.10.2]). *Sei X normal, $A \subset X$ abgeschlossen und $U \subset X$ offen mit $A \subset U$. Dann gibt es eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_{X \setminus V} \equiv 1$.*

Eine direkte Konsequenz ist, dass normale Räume vollständig regulär sind (\rightsquigarrow [Bre93, I.10.3]). Der Beweis von Urysohns Lemma ist eine relativ direkte Anwendung der Normalitätseigenschaft in folgender Form:

Lemma 7.1.4 ([Bre93, I.5, Problem 6]). *Ein Hausdorff Raum X ist genau dann normal wenn es für alle $A \subset X$ abgeschlossen und $U \subset X$ offen mit $A \subset U$ eine offene Menge $V \subset X$ gibt, so dass $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Beweis. Sei zunächst X normal und $A \subset U$ wie oben gegeben. Dann ist $B = X \setminus U$ abgeschlossen und disjunkt von A . Normalität liefert disjunkte offene $V, W \subset X$ mit $A \subset V$ und $B \subset W$. Offenbar gilt dann $\overline{V} \subset X \setminus W \subset X \setminus B = U$.

Sei umgekehrt die zweite Bedingung erfüllt und $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Dann ist $U = X \setminus B$ offen und $A \subset U$. Wir wählen dann $V \subset X$ offen mit $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$ und erhalten durch $W = X \setminus \overline{V}$ eine offene Menge mit $B \subset W$ und $V \cap W = \emptyset$. \square

Für den Beweis von Urysohns Lemma reicht streng genommen die Hinrichtung von Lemma 7.1.4. Die Details sollte man bei Bredon nachlesen (siehe [Bre93, I.10.1&2]). Eventuell hilft ein Blick auf die virtuelle Tafel oder in das entsprechende Video der Vorlesung, wo man eine bildliche Veranschaulichung der Konstruktion finden kann.

Kompaktheit verbessert Trennung. In Anbetracht der Sätze von Urysohn werden die etwas sperrigen Eigenschaft der vollständigen Regularität und Normalität plötzlich interessant. Wie sich herausstellt ist die Kombination und der schwächeren Hausdorff Eigenschaft und einer geeigneten Form von Kompaktheit allerdings genug, um diese stärkeren Trennungseigenschaften sicherzustellen.

Satz ([Bre93, I.7.11]). *Kompakte Hausdorff Räume sind normal.*

Beweis. Siehe Bredon. \square

Definition ([Bre93, I.11.1]). Ein topologischer Raum heißt *lokal kompakt* falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

Satz 7.1.5 (vgl. [Bre93, I.11.2]). *Sei X ist lokal kompakter Hausdorff Raum.*

(i) *Jeder Punkt hat eine Umgebungsbasis aus kompakten Umgebungen.*

(ii) *X ist vollständig regulär.*

Beweis. Der Beweis von (i) ist bei Bredon nachzulesen. Hier ein Beweis von (ii), den Bredon aus unerklärlichen Gründen schuldig bleibt.

Sei $A \subset X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$. Da $X \setminus A$ eine Umgebung von x ist, liefert (i) eine kompakte Umgebung K mit $x \in K \subset X \setminus A$. Als Unterraum eines Hausdorff Raums ist K ebenfalls ein solcher, und somit nach [Bre93, I.7.11] normal. Außerdem ist K nach [Bre93, I.7.5] abgeschlossen in X , was zur Folge hat, dass $\partial K \subset K$ sowohl in X als auch in K abgeschlossen ist. Da K eine Umgebung von x ist, gilt $x \in K \setminus \partial K$ und das Lemma von Urysohn angewendet auf ∂K und x im Raum K liefert $f: K \rightarrow [0, 1]$ stetig mit $f|_{\partial K} \equiv 1$ und $f(x) = 0$. Diese Funktion lässt sich durch

$$\tilde{f}: X \rightarrow [0, 1], \quad \begin{cases} f(x), & x \in K \\ 1, & x \in \overline{X \setminus K} \end{cases}$$

stetig auf ganz X fortsetzen. Da $\partial K = \partial(X \setminus K)$ gilt, ist \tilde{f} wohldefiniert und die Stetigkeit folgt aus [Bre93, I.2, Problem 8] (auch bekannt als Aufgabe 2.3 von Übungsblatt 2). Offenbar gilt $\tilde{f}(x) = 0$ und da $A \subset X \setminus K$ erhalten wir $f|_A \equiv 1$. \square

7.2 Donnerstag, 4. Juni

7.2.1 Anklebungen und Zellkomplexe

Die Anklebekonstruktion. Die Anklebekonstruktion aus [Bre93, I.13.13] hatten wir bereits vor einer Woche kennen gelernt. Diese erlaubt es, an einen gegebenen Raum Y einen anderen Raum X entlang einer stetigen Abbildung $f: A \rightarrow Y$ aus einem abgeschlossenen Unterraum $A \subset X$ „anzukleben“. Die Intuition dabei ist, dass jedes $a \in A$ an den Punkt $f(a)$ geklebt wird. Formal wird dies als Quotient der topologischen Summe $X + Y$ definiert:

$$Y \cup_f A := (X + Y) / \sim = (X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}) / (a, 0) \sim (f(a), 1) \forall a \in A$$

Die Anklebekonstruktion kommt zusammen mit Abbildungen

$$\begin{aligned} k_Y: Y &\rightarrow Y \cup_f A, & k_Y(y) &= [y, 1] \\ k_X: X &\rightarrow Y \cup_f A, & k_X(x) &= [x, 0], \end{aligned}$$

die wir auch etwas formaler über folgendes kommutative Diagramm beschreiben können:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & & & Y \\ & & & \swarrow j_Y & \downarrow k_Y \\ & & X + Y & & \\ & \swarrow j_X & & \searrow \pi & \\ X & \xrightarrow{k_X} & & & Y \cup_f X. \end{array}$$

Hierbei sind $i: A \rightarrow X$ die Inklusion von A , j_X und j_Y die Inklusionen in die Summe und π ist die Quotientenabbildung. Wenn wir wie oben mit dem Standardmodell der Summe $X + Y$ arbeiten, gilt offensichtlich $k_X = \pi \circ j_X$ und $k_Y = \pi \circ j_Y$. Aus dieser Beschreibung ist die Stetigkeit von k_X und k_Y offensichtlich. Um die Notation übersichtlich zu halten schreiben wir im Folgenden für gegebene $A \subset X$ und $B \subset Y$

$$A + B = j_X(A) \cup j_Y(B) = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}) \subset X + Y$$

und noch verkürzter $A = A + \emptyset$ und $B = \emptyset + B$. Diese strenggenommen mehrdeutige Notation ist gerechtfertigt, da wir X und Y nach Satz A.1.13 via j_X und j_Y als Unterräume von $X + Y$ auffassen können.

Lemma 7.2.1 (vgl. [Bre93, I.13.14]). *Seien Y , $A \subset X$ und $f: A \rightarrow Y$ wie zuvor.*

- (i) *Die Abbildung $k_Y: Y \rightarrow Y \cup_f X$ ist eine abgeschlossene Einbettung.*
- (ii) *Die Einschränkung von k_X auf $X \setminus A$ ist eine offene Einbettung.*

Insbesondere ist $Y \cup_f X$ die disjunkte Vereinigung der abgeschlossenen Teilmenge $k_Y(Y)$ und der offenen Teilmenge $k_X(X \setminus A)$.

Beweis. Die Stetigkeit von k_X und k_Y haben wir bereits nachgewiesen. Außerdem wissen wir aus Satz A.1.13, dass die Inklusionen j_X und j_Y offene und abgeschlossene Einbettungen sind. Nun gilt für $z \in Y \cup_f X$

$$\pi^{-1}(z) = \begin{cases} \{x\} & \text{falls } z = k_X(x) \text{ mit } x \in X \setminus A \\ i(f^{-1}(y)) + \{y\} & \text{falls } z = k_Y(y). \end{cases}$$

Dies sind nichts anderes als die Äquivalenzklassen in $X + Y$ bezüglich der definierenden Äquivalenzrelation. Insbesondere sehen wir für gegebene $y \in Y$ und $x \in X \setminus A$

$$k_X^{-1}(k_Y(x)) = j_X^{-1}(\{x\}) = \{x\} \quad k_Y^{-1}(k_Y(y)) = j_Y^{-1}(i(f^{-1}(y)) + \{y\}) = \{y\},$$

was bedeutet, dass k_X und k_Y injektiv auf $X \setminus A$ und Y sind und dass $Y \cup_f X$ die disjunkte Vereinigung von $k_Y(Y)$ und $k_X(X \setminus A)$ ist.

Wir zeigen nun, dass k_Y abgeschlossen ist. Für abgeschlossenes $B \subset Y$ gilt

$$\pi^{-1}(k_Y(B)) = i(f^{-1}(B)) + B = j_X(i(f^{-1}(B))) \cup j_Y(B) \subset X + Y.$$

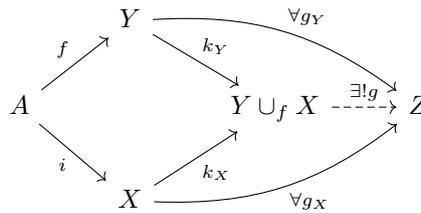
A priori ist $f^{-1}(B)$ abgeschlossen in A . Da $A \subset X$ abgeschlossen ist, ist $i(f^{-1}(B))$ ebenfalls abgeschlossen in X . Folglich ist $\pi^{-1}(k_Y(B))$ abgeschlossen in $X + Y$ und somit $k_Y(B)$ abgeschlossen in $Y \cup_f X$. Schließlich sei $U \subset X \setminus A$ offen. In diesem Fall gilt

$$\pi^{-1}(k_X(U)) = j_X(U) \subset X + Y$$

Da A abgeschlossen in X ist, ist U auch offen in X . Somit ist $\pi^{-1}(k_X(U)) = j_X(U)$ offen in $X + Y$, da j_X offen ist. Es folgt die Offenheit von $k_X(U)$ in $Y \cup_f X$. \square

Die universelle Eigenschaft der Anklebekonstruktion. Streng genommen ist die Anklebekonstruktion genauso mehrdeutig wie die topologische Summe. Der Ausweg ist wie immer eine universelle Eigenschaft, die die Anklebung bis auf kanonischen Homöomorphismus charakterisiert. Den ersten Teil des nächsten Satzes sollten Sie in Hausaufgabe 6.3 beweisen. Hier noch einmal die Lösung.

Satz 7.2.2 (Universelle Eigenschaft der Anklebung). *Die Anklebekonstruktion $Y \cup_f X$ zusammen mit den Abbildungen k_X und k_Y folgendes universelle Problem löst:*



Im Detail: für alle Paare von Abbildungen $g_Y: Y \rightarrow Z$ und $g_X: X \rightarrow Z$ mit $g_Y \circ f = g_X \circ i$ gibt es genau eine stetige Abbildung $g: Y \cup_f X \rightarrow Z$ gibt, so dass $g_X = g \circ k_X$ und $g_Y = g \circ k_Y$. Für jede andere Lösung

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \downarrow \tilde{k}_Y & \\ X & \xrightarrow{\tilde{k}_X} & Y \tilde{\cup}_f X \end{array}$$

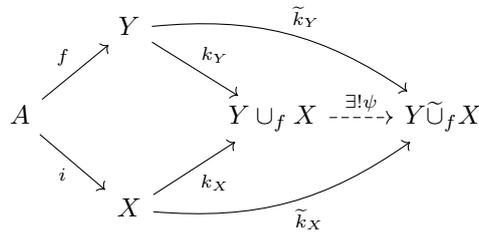
gibt einen eindeutig bestimmten Homöomorphismus $\psi: Y \cup_f X \rightarrow Y \tilde{\cup}_f X$, so dass $\tilde{k}_X = \psi \circ k_X$ und $\tilde{k}_Y = \psi \circ k_Y$.

Beweis. Da $Y \cup_f X$ die Vereinigung der Bilder von k_X und k_Y ist, ist klar, dass es maximal eine solche Abbildung g geben kann. Die universelle Eigenschaft der topologischen Summe garantiert eine eindeutige Stetige Abbildung $\tilde{g}: X + Y \rightarrow Z$ mit $g_X = \tilde{g} \circ j_X$ und $g_Y = \tilde{g} \circ j_Y$. Die Annahme $g_X \circ i = g_Y \circ f$ hat zur Folge, dass \tilde{g} auf den Äquivalenzklassen $\pi^{-1}(z)$ für $z \in Y \cup_f X$ konstant ist, denn für $a \in A$ mit $f(a) = y$ gilt

$$\tilde{g}(j_X(i(a))) = g_X \circ i(a) = g_Y \circ f(a) = \tilde{g}(j_Y(y))$$

und somit $\tilde{g}(i(f^{-1}(y)) + \{y\}) = \tilde{g}(j_Y(y))$ für alle $y \in Y$. Folglich induziert \tilde{g} die gesuchte stetige Abbildung $g: Y \cup_f X \rightarrow Z$.

Falls $(Y \widetilde{\cup}_f X, \widetilde{k}_X, \widetilde{k}_Y)$ eine weitere Lösung des universellen Problems ist, erhalten wir den gesuchten Homöomorphismus ψ aus dem Diagramm

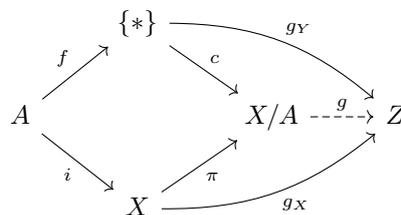


wobei der inverse Homöomorphismus aus dem analogen Diagramm mit vertauschten Rollen von $Y \cup_f X$ und $Y \widetilde{\cup}_f X$ entsteht. \square

Kollabierte Unterräume als Spezialfall.

Beispiel 7.2.3. Im Anschluss an die Definition I.13.13 behauptet Bredon, dass die Kollabierung X/A ein Spezialfall einer Anklebung ist, nämlich für einen einpunktigen Raum $Y = \{*\}$. In diesem Fall gibt es offenbar nur eine einzige Abbildung $A \rightarrow \{*\}$. Ein Homöomorphismus lässt sich zwar leicht hinschreiben, allerdings lässt sich an diesem Beispiel die Nützlichkeit von Satz 7.2.2 illustrieren.

Sei nämlich $\pi: X \rightarrow X/A$ die Quotientenabbildung und $c: \{*\} \rightarrow X/A$ die Abbildung, die den einzigen Punkt $*$ auf den Punkt $[A] \in X/A$ schickt, der der kollabierten Teilmenge $A \subset X$ entspricht. Wir zeigen nun, dass die universelle Eigenschaft der Anklebung erfüllt ist, in dem wir das universelle Problem lösen:



Da π surjektiv ist, ist die einzige Möglichkeit, g für gegebene g_X und g_Y zu definieren

$$g([x]) = g(\pi(x)) = g_X(x)$$

zu setzen. Die Annahme $g_X \circ i = g_Y \circ f$ garantiert, dass g_X auf A konstant mit Wert $[A]$ ist, so dass g wohldefiniert ist. Per Konstruktion ist dann $\pi \circ g = g_X$ stetig, so dass g nach Lemma A.1.6 stetig ist. Satz 7.2.2 liefert dann einen kanonischen Homöomorphismus $\psi: \{*\} \cup_f X \rightarrow X/A$ mit $\pi = \psi \circ k_X$ und $c = \psi \circ k_Y$.

Anklebungen von Zellen und Zellkomplexe. Einer der wichtigsten Spezialfälle ist das Ankleben sogenannter *Zellen*. Dabei handelt es sich um nichts anderes als eine Scheibe D^n , die entlang einer Abbildung $f: S^{n-1} \rightarrow Y$ an einen Raum Y angeklebt wird. Es handelt sich also um die Anklebung im Spezialfall $X = D^n$ und $A = S^{n-1}$. In diesem Zusammenhang nennt man D^n , bzw. sein Bild in $Y \cup_f D^n$, gewöhnlich eine n -dimensionale *Zelle*.

Definition 7.2.4. Man sagt, der Raum $Y \cup_f D^n$ entstehe aus Y durch *Ankleben einer n -Zelle* entlang $f: S^{n-1} \rightarrow Y$. Im Fall $n = 0$ setzt man per Konvention $Y \cup_f D^0 = Y + D^0$, das heißt, eine 0-Zelle anzukleben bedeutet, einen disjunkten Punkt hinzuzufügen. Einen Raum, der aus der leeren Mengen durch das sukzessive Ankleben endliche vieler Zellen entsteht nennt man einen *endlichen Zellkomplex*.

Die Bedeutung von Zellkomplexen und insbesondere sogenannten *CW Komplexen* (siehe [Bre93, I.8, S.194 ff.]) wird erst deutlich, wenn man sich mit der algebraischen Topologie beschäftigt und insbesondere (Ko-)Homologietheorien beschäftigt (siehe [Bre93, IV.6.1]). Mit Hilfe von Abbildungen $f: S^n \rightarrow Y$ lässt sich jedem Raum Y eine Gruppe $\pi_n(Y)$ zuordnen (siehe [Bre93, III.1]), die man *n-te Homotopiegruppe* von Y nennt. Den Spezialfall $n = 1$, die sogenannte *Fundamentalgruppe* $\pi_1(Y)$, werden wir am Ende des Semester kennenlernen.

Beispiel 7.2.5. In diesem Beispiel wollen wir den Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ als Zellkomplex darstellen. Wir gehen in mehreren Schritten vor.

- (1) Beispiele 6.1.3 und 7.2.3 zusammen liefern für $n \geq 1$ Homöomorphismen

$$\{*\}_f \cup D^n \approx D^n/S^{n-1} \approx S^n.$$

Insbesondere erhalten wir den Einheitskreis S^1 , indem wir eine 1-Zelle an einen Punkt ankleben, den wir wiederum als eine 0-Zelle auffassen können.

- (2) Nun denken wir uns $S^1 \subset \mathbb{C}$ als Einheitskreis in der komplexen Ebene und kleben eine weitere 1-Zelle entlang der konstanten Abbildung $c: S^0 \rightarrow S^1$ mit $c(\pm 1) = 1 \in C$ an. Das Resultat ist homöomorph zu der sogenannten *Einpunktvereinigung*

$$S^1 \vee S^1 = (S^1 \times \{1\}) \cup (\{1\} \times S^1).$$

Um einen Homöomorphismus zu erhalten, betrachten wir die Abbildungen

$$\begin{aligned} j: S^1 &\longrightarrow S^1 \vee S^1, & j(z) &= (z, 1) \\ h: D^1 &\longrightarrow S^1 \vee S^1, & h(t) &= (1, e^{\pi i(1-t)}). \end{aligned}$$

Offenbar gilt $h(\pm 1) = (1, 1) = j(c(\pm 1))$ und wir erhalten ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \xrightarrow{c} & S^1 \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ D^1 & \xrightarrow{h} & S^1 \vee S^1 \end{array}$$

Die universelle Eigenschaft der Anklebung liefert dann eine stetige Abbildung

$$f: S^1 \cup_c D^1 \rightarrow S^1 \vee S^1.$$

Aus den Definitionen sieht man leicht, dass j und h injektiv auf ganz S^1 bzw. $D^1 \setminus S^0$ sind und dass die Vereinigung ihrer Bilder ganz $S^1 \vee S^1$ ist. Daraus kann man schließen, dass f bijektiv ist. Nun ist aber $S^1 \vee S^1$ als Unterraum von $S^1 \times S^1$ ein Hausdorff Raum und $S^1 \cup_c D^1$ als Quotient der kompakten Summe $D^1 + S^1$ kompakt. Somit ist f nach [Bre93, I.7.8] ein Homöomorphismus.

Alternativ hätte man hier auch wieder die universelle Eigenschaft der Anklebung für das Tripel $(S^1 \vee S^1, j, h)$ nachweisen können. Es ist durchaus ratsam, dies einmal zu versuchen, um sich mit verschiedenen Argumentationsmustern vertraut zu machen.

- (3) Schließlich betrachten wir die Abbildung

$$\gamma: S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1, \quad \begin{cases} (e^{2\pi i \cdot 4t}, 1) & t \in [0, 1/4] \\ (1, e^{2\pi i(4t-1)}) & t \in [1/4, 1/2] \\ (e^{-2\pi i(4t-2)}, 1) & t \in [1/2, 3/4] \\ (1, e^{-2\pi i(4t-3)}) & t \in [3/4, 1] \end{cases}$$

von deren Stetigkeit man sich leicht überzeugt. Wir können γ als eine geschlossene Kurve in $S^1 \times S^1$ vorstellen, zunächst den eingebetteten Kreis $S^1 \times 1$ in einer Richtung

durch, dann den Kreis $1 \times S^1$, dann wieder $S^1 \times 1$ allerdings in umgekehrter Richtung, und schließlich noch einmal $1 \times S^1$ ebenfalls in umgekehrter Richtung. Wir behaupten, dass die Anklebung $(S^1 \vee S^1) \cup_\gamma D^2$ homöomorph zu $S^1 \times S^1$ ist. Dazu konstruieren wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\gamma} & S^1 \vee S^1 \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ D^2 & \xrightarrow{\Gamma} & S^1 \times S^1 \end{array}$$

wobei j die Inklusion von $S^1 \vee S^1$ in $S^1 \times S^1$ ist. Um die Abbildung Γ zu erhalten, benutzen wir als Hilfe die Abbildung

$$\varphi: D^2 \rightarrow [-1, 1]^2, \quad \varphi(re^{i\theta}) = \frac{re^{i\theta}}{\max\{|\cos \theta|, |\sin \theta|\}},$$

die den Kreis radial auf das Einheitsquadrat streckt. Mit etwas Rechnerei kann man sich überzeugen, dass φ ein Homöomorphismus ist. Die Abbildung Γ erhalten wir dann als Komposition von φ mit der Abbildung

$$[-1, 1]^2 \rightarrow S^1 \times S^1, \quad (s, t) \mapsto (e^{\pi i(1-s)}, e^{\pi i(1-t)}).$$

Das Diagramm induziert dann zusammen mit der universellen Eigenschaft der Anklebung eine Abbildung $(S^1 \vee S^1) \cup_\gamma D^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ und ein ähnliches kompakt-Hausdorff Argument wie zuvor zeigt, dass es sich um einen Homöomorphismus handelt.

Die Moral von dieser Geschichte ist, dass wir $S^1 \times S^1$ nach und nach aus einer 0-Zelle, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle konstruiert haben. Die ganze Diskussion lässt sich auch sehr schön in dem Modell des Torus beschreiben, bei dem die gegenüberliegenden Ränder eines Quadrats identifiziert werden. Die Abbildung γ macht in diesem Bild nicht anderes als den Rand des Quadrats in eine Richtung zu durchlaufen.

7.2.2 Lokal Euklidische Räume und topologische Mannigfaltigkeiten

Nachdem wir jetzt alle notwendigen Begriffe aus der Sprache der abstrakten Topologie kennen, wenden wir uns einer speziellen Klasse von Räumen zu, die die Grundlage der modernen Geometrie bilden. Diese sind unter dem Namen „Mannigfaltigkeiten“ bekannt, meist dekoriert mit diversen Adjektiven.

Was sollte eine Mannigfaltigkeit sein? Die Idee der Mannigfaltigkeit könnte nicht alltäglicher sein: heute weiß jedes Kind, dass die Erde eine Kugel ist, obwohl ihre Oberfläche durch unsere Augen betrachtet erstmal wie eine Scheibe aussieht. Auch innerhalb der Mathematik und Physik gibt tauchen an vielen Stellen Räume auf, die lokal so aussehen wie ein Vektorraum, global allerdings weit davon entfernt sind. Die Idee der Mannigfaltigkeiten ist also in erster Näherung:

Idee: „Mannigfaltigkeiten“ sind Räume, die nahe jedem Punkt so aussehen wie ein Euklidischer Raum \mathbb{R}^n .

Die Anführungszeichen sind bewusst gesetzt, denn wie sich herausstellt, ist diese Idee nicht genug, um eine vernünftige Theorie aufzubauen. Meistens begegnen einem diese Räume als Unterräume eines umgebenden Euklidischen Raums. Beispielsweise stellt sich für uns die Erdkugel als Teil eines dreidimensionalen Anschauungsraums dar. Und letztendlich war die Position relativ zu anderen Objekten wesentlich für die Erkenntnis, dass die Erde keine Scheibe ist. Ein gut verständlicher umgebender Raum kann also sehr hilfreich sein. Allerdings haben wir in der Vorlesung Beispielen von unendlich verknoteten Kreisen im dreidimensionalen Raum gesehen, die man eigentlich nicht mehr guten Gewissens Kreis nennen kann.

Wir müssen also unsere Wunschliste präzisieren. Also gehen wir noch einmal tief in uns und stellen fest:

Mannigfaltigkeiten sollten...

- ... lokal aussehen wie Euklidische Räume.
- ... nicht notwendig Unterräume von Euklidischen Räumen sein, wobei es praktisch wäre, sie bei Bedarf so darzustellen.
- ... zumindest lokal nahe jedem Punkt würden wir gerne Bewegungen und Richtungsänderungen wie in \mathbb{R}^n beschreiben können. Wir hätten also gerne die Möglichkeit, nahe jedem Punkt eine Differentialrechnung ähnlich wie in \mathbb{R}^n einzuführen.

Lokal Euklidische Räume und das Dimensionsproblem Mit allem, was wir bisher gelernt haben, können wir zumindest die ersten anderthalb Forderungen in eine präzise Definition umwandeln.

Definition 7.2.6. Ein topologischer Raum X heißt *lokal Euklidisch* falls es für jedem Punkte $x \in X$ eine offene Umgebung und einen Homöomorphismus

$$\phi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$$

auf eine offene Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^n$ gibt. Das Paar (U, ϕ) nennen wir eine *n-dimensionalen Karte* von X um x .

Rein topologisch gesehen ist diese Definition nicht uninteressant und liefert eine Klasse von Räumen, die deutlich bessere Eigenschaften haben, als allgemeine topologische Räume. Als Hausaufgabe sollen Sie beispielsweise zeigen, dass die Begriffe Zusammenhang und Wegzusammenhang für lokal Euklidische Räume übereinstimmen. Pathologische Beispiele wie der Topologensinus sind also von vornherein ausgeschlossen.

Allerdings sind lokal Euklidische Räume unzureichend in vielerlei Hinsicht unzulänglich, um unsere intuitive Vorstellung von Mannigfaltigkeiten zufriedenstellend abzubilden. Ein sehr subtiles Problem zeigt sich bei einer genauen Betrachtung der Definition der Dimension. Man ist im ersten Moment geneigt, die in [Definition 7.2.6](#) auftretenden Zahl n als Dimension von X zu betrachten. Diese unscheinbare Annahme erweist sich allerdings als ein ernsthafter Stresstest für die mühsam entwickelte Sprache der topologischen Räume und stetigen Abbildungen.

Frage: Sei X ein lokal Euklidischer Raum. Kann ein Punkt $x \in X$ für $m \neq n$ sowohl m -dimensionale als auch n -dimensionale Karten haben? Oder anders gefragt: können \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n für $m \neq n$ homöomorph sein?

Die Antwort sollte selbstverständlich klar und deutlich nein sein. Alles andere wäre ein unakzeptabler Glaubwürdigkeitsverlust des Begriffs der Stetigkeit. Die Tatsache, dass Sie heute immer noch über topologische Räume und Stetigkeit lernen, deutet vielleicht schon an, dass die entwickelte Theorie den Stresstest letztendlich bestanden hat. Allerdings ist die sogenannte *Invarianz der Dimension* alles andere als Selbstverständlich. Diese und ähnliche Fragen lassen sich mit Methoden der algebraischen Topologie, insbesondere den schon genannten Homologietheorien, behandeln (siehe [\[Bre93, IV.19.10\]](#)). Die Entwicklung der algebraischen Topologie wäre wiederum ohne die abstrakte Sprache der topologischen Räume nahezu undenkbar.

Aber zurück zur Suche nach einem geeigneten Mannigfaltigkeitsbegriff. Ein Punkt an dem lokal Euklidische Räume deutlich offensichtlicher scheitern ist der Wunsch nach einer lokalen Differentialrechnung. Sei nämlich X ein lokal Euklidischer Raum und $\phi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte um einen Punkt $x \in X$. Dann ist für eine gegebene Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Komposition

$$f|_U \circ \phi^{-1}: U' \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Funktion auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n . Für solche Funktionen wissen wir, was Differenzierbarkeit heißen sollte. Nehmen wir also einmal an, $f \circ \phi^{-1}$ sei differenzierbar in $\phi(x)$. Nun sein $\psi: V \rightarrow V'$ eine andere Karte um x . Dann gilt für alle $y \in \psi(U \cap V)$

$$f \circ \psi^{-1}(y) = f \circ \phi^{-1} \circ (\phi \circ \psi^{-1})(y).$$

Die Komposition $\phi \circ \psi^{-1}$ nennt man einen *Kartenwechsel*. Genauer handelt es sich dabei um eine Abbildung

$$\mathbb{R}^n \supset \psi(U \cap V) \xrightarrow{\psi} \phi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$$

zwischen offenen Teilmengen von \mathbb{R}^n – vorausgesetzt wir nehmen die Invarianz der Dimension als gegeben hin. Wäre $\phi \circ \psi^{-1}$ in $\psi(x)$ differenzierbar, so wäre $f \circ \psi^{-1}$ nach der Kettenregel auch in $\psi(x)$ differenzierbar. Somit könnten wir, wenn auch mit Umweg über Karten, wohldefiniert lokal von Differenzierbarkeit sprechen. Allerdings hat $\phi \circ \psi^{-1}$ als Komposition von Homöomorphismen überhaupt keinen Grund, differenzierbar zu sein. Tatsächlich kann man falls $n \geq 1$ für jede Karte ϕ , bezüglich der $f \circ \phi$ differenzierbar in $\phi(x)$ ist, eine Karte ψ finden, so dass $f \circ \psi^{-1}$ nicht in $\psi(x)$ differenzierbar ist. Hier ist die Lage also ausweglos: Topologie allein ist nicht genug, um eine lokale Differentialrechnung auf die Beine zu stellen.

Darüber hinaus stellt sich heraus, dass einfach zu viele merkwürdige topologische Räume lokal euklidisch sind. Beispielsweise ist die Gerade mit Doppelnulldifferenzierbarkeit aus [Beispiel 4.2.2\(e\)](#) lokal homöomorph zu \mathbb{R} (und das sogar mit differenzierbaren Kartenwechseln!), aber nicht einmal ein Hausdorff-Raum. Da wir so etwas wie Analysis betreiben wollen, sollten Grenzwerte allerdings besser eindeutig sein. Deutlich subtiler und gleichzeitig um einiges problematischer gibt es Beispiele lokal euklidischer Räume, die keine abzählbare Basis haben. Warum das ein Problem darstellt, ist ähnlich wenig offensichtlich wie die Invarianz der Dimension, aber es stellt ein Problem dar. Mehr dazu später.

Wie wir sehen werden, lassen sich die Problemfliegen Dimension und Differenzierbarkeit mit einer Klappe schlagen, nämlich der Forderung, dass die Kartenwechsel $\phi \circ \psi^{-1}$ differenzierbar sein sollten – was wiederum neue subtile Fragen aufwirft. Um unnatürliche Beispiele auszuschließen hat sich folgende Definition als zufriedenstellend erwiesen:

Definition 7.2.7. Ein lokal euklidischer Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie heißt *topologische Mannigfaltigkeit*.

Mit dieser Definition endet der rein topologische Teil dieser Vorlesung vorerst. Als nächstes müssen wir uns Gedanken darüber machen, wie wir Differenzierbarkeit, die letztendlich nicht anderes bedeutet als *lokale Linearisierbarkeit*, mit der Sprache der Topologie in Einklang bringen können.

8 Woche 8

8.1 Dienstag, 9. Juni

8.1.1 Ein Beispiel vorweg

Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ differenzierbar, der Sicherheit halber unendlich oft. Wir betrachten den Graphen

$$M = \{(u, f(u)) \mid u \in U\} \subset \mathbb{R}^{k+\ell}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Projektion $\mathbb{R}^{k+\ell} \rightarrow \mathbb{R}^k$ auf die ersten k Komponenten eingeschränkt auf M ein Homöomorphismus $M \rightarrow U$ liefert, der inverse zu der Abbildung $u \mapsto (u, f(u))$ ist. Insbesondere ist M eine topologischen Mannigfaltigkeit. Bis hierhin war die Differenzierbarkeit von f unerheblich. Welchen Mehrwert bietet sie also?

Für jedes $u \in U$ ist die Ableitung $Df(u): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ eine lineare Abbildung. Für einen Punkt $x = (u, f(u)) \in M$ betrachten wir dann den affinen Unterraum

$$\begin{aligned} T_x M &= \{(u + v, f(u) + Df(u)v) \mid v \in \mathbb{R}^k\} \\ &= x + \{(v, Df(u)v) \mid v \in \mathbb{R}^k\} \subset \mathbb{R}^{k+\ell}. \end{aligned}$$

Für $k = \ell = 1$ ist dies nichts anderes als die Tangente an den Graphen von f im Punkt x . Allgemein nennt man $T_x M$ den *Tangentialraum* von M am Punkt x . Genau wie die Ableitung $Df(u)$ die bestmögliche „lineare“ Approximation von f nahe u ist, sollte man sich den Tangentialraum als „lineare“ Approximation von M nahe x vorstellen – „linear“ in Anführungszeichen, weil eigentlich affin gemeint ist. Es stellt sich heraus, dass die lokale Struktur von M nahe x im Wesentlichen durch $T_x M$ bestimmt ist, was es möglich macht, auf Methoden der linearen Algebra zurück zu greifen.

Beispiel 8.1.1. Als konkretes Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f: B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

In diesem Fall ist der Graph genau die offene obere Hemisphäre in S^2 :

$$M = \{(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \mid x^2 + y^2 < 1\} = S^2 \cap \{z > 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass der Tangentialraum in einem Punkt $p \in S^2 \cap \{z > 0\}$ in diesem Fall gegeben ist durch

$$T_p M = p + \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, v \rangle = 0\},$$

was sich mit der Anschauung deckt, dass das orthogonale Komplement von $p \in S^2$ in \mathbb{R}^3 die bestmögliche lineare Approximation von S^2 liefert.

Das Problem mit dieser Beschreibung von Tangentialräumen ist, dass Sie offensichtlich stark von dem umgebende Euklidischen Raum abhängt und zusätzlich noch von der Abbildung f . Außerdem haben wir im Fall von S^2 gesehen, dass nicht sich mit dieser Methode nicht alle Tangentialräume auf einmal beschreiben lassen. Wir werden allerdings später sehen, dass die Tangentialräume tatsächlich *global* und *intrinsisch* beschrieben werden können. Nichtsdestotrotz sollte man die obige Beschreibung von Tangentialräumen stets im Hinterkopf behalten, da sie die nötige Anschauung liefert.

8.1.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Bredon gibt zwei verschiedene Beschreibungen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Beide Beschreibungen basieren darauf, gewisse Objekte jeweils als „differenzierbar“ zu erklären: einmal Karten, und einmal Funktionen auf offenen Teilmengen. Hier eine etwas ausführlichere und kommentierte Version von Bredons sehr kompakt gehaltener Kartendefinition.

Definition 8.1.2 (vgl. [Bre93, II.2.1]). Sei X ein topologischer Raum.

- (1) Ein Homöomorphismus $\phi: U \rightarrow U'$ von einer offenen Teilmenge $U \subset X$ auf eine offene Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^n$ heißt (*n-dimensionale Karte*) von X . Äquivalent ist eine Karte ein Paar (U, ϕ) wobei $U \subset M$ eine offene Teilmenge und $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine offene Einbettung ist. Die Menge U heißt *Kartengebiet* oder *Kartenumgebung*. Falls $x \in U$ sprechen wir von einer *Karte um x* .
- (2) Eine Familie von Karten $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ mit $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ heißt *Atlas* von X . Offensichtlich existiert genau dann ein Atlas wenn X lokal Euklidisch ist.
- (3) Seien (U, ϕ) und (V, ψ) zwei Karten von X mit $U \cap V \neq \emptyset$. Die Komposition

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\phi \circ \psi^{-1}} & \\ \mathbb{R}^n \supset \phi(U \cap V) & & \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m \\ & \xrightarrow{\psi \circ \phi^{-1}} & \end{array}$$

heißen *Kartenwechsel*. In der Regel werden die Definitions- und Wertebereiche von Kartenwechseln nicht explizit notiert. Man schreibt einfach $\psi \circ \phi^{-1}$ und $\phi \circ \psi^{-1}$ und überlässt den Rest der Phantasie den Lesenden.

- (4) Zwei Karten (U, ϕ) und (V, ψ) heißen C^k *verträglich* falls entweder $U \cap V = \emptyset$ oder die Kartenwechsel $\psi \circ \phi^{-1}$ und $\phi \circ \psi^{-1}$ beide k -fach stetig differenzierbar sind. Letzteres ist möglich, da die Kartenwechsel Abbildungen zwischen offenen Teilmengen von Euklidischen Räumen sind. Hierbei ist $1 \leq k \leq \infty$, wobei wir uns im Folgenden auf den C^∞ Fall beschränken.
- (5) Ein C^k -*Atlas* von X ist ein Atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, so dass alle Kartenwechsel $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$, $\alpha, \beta \in A$, C^k Abbildungen sind; das heißt, alle Karten aus \mathcal{A} sind paarweise C^k -verträglich.
- (6) Eine C^k *Struktur* auf X ist ein C^k -Atlas \mathcal{S} , der maximal ist in dem Sinne, dass jede Karte von X , die C^k verträglich mit allen Karten aus \mathcal{S} ist, bereits in \mathcal{S} enthalten ist.
- (7) Eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit* (auch C^∞ Mannigfaltigkeit oder *glatte Mannigfaltigkeit*) ist ein Paar (M, \mathcal{S}) bestehend aus einem Hausdorff Raum M mit abzählbarer Basis der Topologie und einer C^∞ Struktur \mathcal{S} auf M . Die C^∞ Struktur wird in der Regel nicht explizit notiert, genau wie die Topologie. Man spricht einfach von einer C^∞ Mannigfaltigkeit M und nennt die Elemente der differenzierbare Struktur *differenzierbare Karten*.

Noch einige Kommentare zur Definition:

- Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit ist automatisch eine topologische Mannigfaltigkeit. Allerdings stellt sich heraus, dass nicht jede topologische Mannigfaltigkeit eine C^∞ Struktur hat und dass ein und dieselbe topologische Mannigfaltigkeiten viele verschiedene C^∞ Strukturen haben kann. Dies ist ein sehr subtiler Punkt, der lange übersehen wurde. Die moderne Definition differenzierbarer Mannigfaltigkeiten hatte sich etwa in den 1920er Jahren etabliert. Aber erst 1957 entdeckte John Milnor, dass die 7-dimensionale Sphäre mehr als eine C^∞ Struktur hat [Mil56]. Tatsächlich gibt es bis auf Diffeomorphismus (siehe unten) genau 28.
- Ein weiterer subtiler Punkt ist der Dimensionsbegriff, der in der obigen Definition nur um Zusammenhang mit Wertebereichen von Karten auftritt. Wir zeigen nun, wie die Differenzierbarkeit der Kartenwechsel garantiert, dass man für differenzierbare Mannigfaltigkeiten vernünftig von *der* Dimension reden kann.

Lemma 8.1.3 (C^1 -Invarianz der Dimension). *Zwei C^1 verträgliche Karten, deren Kartengebiete sich schneiden, haben dieselbe Dimension.*

Beweis. Seien $\phi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ und $\psi: V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^m$ Karten eines Raums X und $x \in U \cap V$. Die Ableitungen der Kartenwechsel sind dann lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} L_\phi &:= D(\phi \circ \psi^{-1})(\psi(x)): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{und} \\ L_\psi &:= D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x)): \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Nun liefert aber die Kettenregel

$$\begin{aligned} L_\psi \circ L_\phi &= D(\phi \circ \psi^{-1})(\psi(x)) \circ D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \\ &= D(\phi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \\ &= D(\text{id}_{\mathbb{R}^m})(\phi(x)) = \text{id}_{\mathbb{R}^m} \end{aligned}$$

und analog $L_\psi \circ L_\phi = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Mit anderen Worten, L_ϕ und L_ψ sind inverse lineare Isomorphismen. Dementsprechend gilt $m = n$, da isomorphe \mathbb{R} -Vektorräume nach einem grundlegenden Satz der linearen Algebra dieselbe Dimension haben. \square

Korollar 8.1.4. *Sei M eine zusammenhängende C^∞ Mannigfaltigkeit. Dann haben alle differenzierbaren Karten dieselbe Dimension. Insbesondere kann man M eine wohldefinierte Dimension $\dim(M)$ zuordnen.*

Beweis. Für $x \in M$ sei $\dim_x(M)$ die Dimension einer beliebigen differenzierbaren Karte um x . Nach Lemma 8.1.3 ist $\dim_x(M)$ wohldefiniert. Offensichtlich ist die Funktion

$$M \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad x \mapsto \dim_x(M)$$

auf jedem Kartengebiet einer differenzierbaren Karte und somit stetig bezüglich der diskreten Topologie auf $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Da M zusammenhängend, ist die Dimensionsfunktion auf ganz M konstant (\rightsquigarrow [Bre93, I.4.5]). \square

Achtung! Bredon handhabt das Dimensionsproblem etwas anders, in dem er direkt “ n -dimensionale Mannigfaltigkeiten“ definiert, das heißt, für jede vorgegebene Dimension wird ein Mannigfaltigkeitsbegriff erklärt. Er beweist dann nachträglich, dass Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen nicht diffeomorph (bzw. homöomorph) sein können. In der obigen Präsentation habe ich diesen Schritt vorgezogen, um den Nutzen der Differenzierbarkeit hervorzuheben. Letztendlich sind aber beide Versionen im Wesentlichen Äquivalent. Der einzige mögliche Unterschied wären Mannigfaltigkeiten mit mehreren Komponenten verschiedener Dimension. So etwas begegnet einem aber eher selten. Insbesondere einigen wir uns auf die Konvention, dass wann immer von einer glatten Mannigfaltigkeit die Rede ist, alle Komponenten dieselbe Dimension haben, es sei denn es ist explizit die Rede von Komponenten verschiedener Dimension.

Mit Hilfe von Karten lässt sich der Differenzierbarkeitsbegriff von \mathbb{R}^n auf C^∞ Mannigfaltigkeiten übertragen.

Definition 8.1.5 (Differenzierbare Funktionen und Abbildungen).

- (1) Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ offen. Eine stetige Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *glatt* oder C^∞ wenn für jede differenzierbare Karte (U, ϕ) die Komposition $f \circ \phi^{-1}$, genannt *Kartendarstellung* von f , glatt ist. Sei $C^\infty(U)$ die Menge aller glatten Funktionen auf U .
- (2) Eine stetige Abbildung $f: M \rightarrow N$ zwischen C^∞ Mannigfaltigkeiten M und N heißt *glatt* falls die Kartendarstellung $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ für alle differenzierbaren Karten (U, ϕ) von M und (V, ψ) von N glatt ist. Sei $C^\infty(M, N)$ die Menge aller glatten Abbildungen von M nach N .

- (3) Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt (C^∞) *Diffeomorphismus* falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} glatt sind. Falls ein so Diffeomorphismus existiert heißen M und N diffeomorph.

Diffeomorphismus ist der natürliche Äquivalenzbegriff für C^∞ Mannigfaltigkeiten. Allerdings gibt es auch schwächere Äquivalenzbegriffe, die sinnvoll sind. Um diese zu unterscheiden, führen wir folgende Notation ein:

$$\begin{aligned} M \cong N & \quad M \text{ ist diffeomorph zu } N \\ M \approx N & \quad M \text{ ist homöomorph zu } N \\ M \simeq N & \quad M \text{ ist homotopieäquivalent zu } N \quad (\rightsquigarrow [\text{Bre93}, \text{I.14.3}]) \end{aligned}$$

Den Begriff der Homotopieäquivalenz werden wir später kennenlernen.

8.1.3 Funktionale Strukturen und Garben

Bredons zweite Beschreibung von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten beruht auf Eigenschaften der Zuordnung $U \mapsto C^\infty(U)$. Die *funktionalen Strukturen* aus [Bre93, I.2.2] findet man allerdings heutzutage unter einem anderen Namen.

Definition 8.1.6 (Garben). Sei X ein topologischer Raum. Eine *Garbe* \mathcal{F} von \mathbb{R} -Algebren besteht aus folgenden Daten:

- Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ eine \mathbb{R} -Algebra $\mathcal{F}(U)$. Elemente von $\mathcal{F}(U)$ nennt man *Schnitte* von \mathcal{F} .
- Für jede Inklusion $U \subset V$ offener Teilmengen einen Homomorphismus $\rho_U^V: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$, so dass $\rho_U^U = \text{id}_U$ und $\rho_U^V \circ \rho_V^W = \rho_U^W$ wann immer $U \subset V \subset W$. Die Abbildung ρ_U^V nennt man auch *Einschränkung* und schreibt $f|_U = \rho_U^V(f)$.

Diese Daten erfüllen zusätzlich folgende Bedingungen für jede Familie offener Teilmengen $\{U_i\}_{i \in I}$:

Lokalität: Falls $f, g \in \mathcal{F}(\cup_{i \in I} U_i)$ und $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ für alle $i \in I$, so gilt $f = g$.

Verklebung: Falls $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ für alle $i \in I$ gegeben sind und $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle $i, j \in I$ gilt, gibt es ein $f \in \mathcal{F}(\cup_{i \in I} U_i)$ mit $f|_{U_i} = f_i$.

Garben sind in der Mathematik nahezu allgegenwärtig. Ihre Stärke liegt darin, das Zusammenspiel zwischen lokaler und globaler Information effizient zu organisieren. Für uns sind folgende Beispiele interessant:

Beispiel 8.1.7. • Sei X ein topologischer Raum. Für offenes $U \subset X$ ist die Menge der stetigen Funktionen $C(U)$ eine \mathbb{R} -Algebra und die Einschränkungabbildungen $C(V) \rightarrow C(U)$ sind \mathbb{R} -Algebra Homomorphismen. Man prüft leicht nach, dass diese Zuordnung eine Garbe auf X ist, die *Garbe der stetigen Funktionen*.

- Falls M eine C^∞ Mannigfaltigkeit ist, ist $C^\infty(U)$ für offenes $U \subset M$ eine Unter-algebra von $C(U)$, die alle konstanten Funktionen enthält. Man sieht leicht, dass für $f \in C^\infty(U)$ und $V \subset U$ die Einschränkung $f|_V$ wieder glatt ist, und dass die Lokalitäts- und Verklebungsbedingungen erfüllt sind. Die C^∞ Funktionen bilden also auch eine Garbe, genauer eine *Untergarbe* der Garbe der stetigen Funktionen auf M .
- Die *funktionalen Strukturen* aus [Bre93, I.2.2] sind in dieser Sprache genau die Untergarben der Garbe von stetigen Funktionen, die alle konstanten Funktionen enthalten.

Achtung! Die Sprache der Garben nimmt in anderen Bereichen der Mathematik, vornehmlich in der algebraischen Geometrie, teilweise eine sehr abstrakte Form an. Insbesondere müssen Schnitte von Garben im Allgemeinen *keine Funktionen* sein!

8.2 Donnerstag, 11. Juni (Feiertag)

Keine Sitzung.

9 Woche 9

9.1 Dienstag, 16. Juni

Weniger ist mehr. Formal ist eine C^∞ Struktur zwar als ein *maximaler* C^∞ Atlas definiert. In der Praxis ist man allerdings eher an möglichst kleinen C^∞ Atlanten interessiert, beziehungsweise an solchen, die nützliche Eigenschaften haben. Die einfache, aber wichtige Einsicht ist, dass durch jeden C^∞ Atlas \mathcal{A} eines Raums X genau eine C^∞ Struktur festgelegt wird. Ein einfaches Argument mit der Kettenregel zeigt nämlich, dass durch

$$\widehat{\mathcal{A}} = \{(V, \psi) \text{ Karte von } X \mid (V, \psi) \text{ ist } C^\infty \text{ verträglich mit allen Karten aus } \mathcal{A}\}$$

ein maximaler C^∞ Atlas gegeben ist, der \mathcal{A} enthält. Für einen anderen C^∞ Atlas \mathcal{B} auf X gilt $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{B}}$ genau dann wenn jede Karte aus \mathcal{A} mit jeder Karte aus \mathcal{B} C^∞ verträglich ist, oder äquivalent, wenn die Vereinigung $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ein C^∞ Atlas von X ist.

Auch beim Nachprüfen der Differenzierbarkeit von Abbildungen $f: M \rightarrow N$ zwischen C^∞ Mannigfaltigkeiten gilt, dass weniger mehr ist. Statt *alle* Kartendarstellungen $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ zu betrachten, genügt es, für jeden Punkte $p \in M$ eine C^∞ Karte von M um p und eine von N um $f(p)$ zu finden, so dass die Kartendarstellung im klassischen Sinne differenzierbar ist (siehe Übungsblatt 9).

9.1.1 Einige abstrakte Beispiele von C^∞ Mannigfaltigkeiten

Beispiel 9.1.1. (Vektorräume als C^∞ Mannigfaltigkeiten) Sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum. Aus den Analysisvorlesungen ist bekannt, dass V eine Norm zulässt und dass alle Normen die gleiche Topologie induzieren, die *Normtopologie*. Durch Wahl einer Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ erhalten wir einen lineare Isomorphismus

$$\phi_B: V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi_B\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Da lineare Abbildungen bezüglich der Normtopologie stetig sind, ist ϕ_B insbesondere auch ein Homöomorphismus. Anders gesagt, durch die Wahl einer Basis haben wir einen Atlas $\{(V, \phi_B)\}$ des topologischen Raums V mit nur einer Karte gefunden. Da mit einer einzigen Karte keine nichttrivialen Kartenwechsel auftreten, handelt es sich um einen C^∞ Atlas, der wie oben beschrieben eine C^∞ Struktur festlegt. Für jede andere Basis $C = (c_1, \dots, c_n)$ sind die Kartenwechsel

$$\phi_B \circ \phi_C^{-1}, \phi_C \circ \phi_B^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

lineare Isomorphismen und insbesondere C^∞ Abbildungen. Folglich ist die C^∞ Struktur, die man durch Wahl einer Basis erhält, tatsächlich unabhängig von der konkreten Wahl der Basis. Diese nennen wir die *lineare C^∞ Struktur* auf V und betrachten im Folgenden aller endlich dimensional \mathbb{R} Vektorräume als C^∞ Mannigfaltigkeiten, in dem wir sie mit der Normtopologie und der linearen C^∞ Struktur ausstatten.

Bemerkung (Exotische C^∞ Strukturen auf \mathbb{R}^n ?). Naiv würde man wohl erwarten, dass es auf \mathbb{R}^n eine eindeutige C^∞ Struktur gibt, nämlich die Lineare. An dieser Stelle wird es allerdings ziemlich wild. Für $n \neq 4$ gibt es tatsächlich bis auf Diffeomorphismus nur die lineare C^∞ Struktur auf \mathbb{R}^n . Allerdings hat \mathbb{R}^4 sogar überabzählbare viele C^∞ Strukturen! Beide Aussagen sind alles andere als einfach zu beweisen. Außerdem stellt sich heraus, dass in Dimension 4 ziemlich nichts so läuft, wie man erwarten würde. Wer einen Einblick in diese Welt erhalten möchte, sei auf das Buch „*The Wild World of 4-manifolds*“ von Alexandru Scorpan verwiesen [Sco05].

Beispiel 9.1.2 (Offene Teilmengen von C^∞ Mannigfaltigkeiten). Offene Teilmengen von C^∞ Mannigfaltigkeiten lassen sich kanonisch als C^∞ Mannigfaltigkeiten auffassen. Sei M

eine C^∞ Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ offen. Dann ist durch Einschränkung der C^∞ Karten von M ein C^∞ Atlas von U gegeben. Genauer:

$$\{(U \cap V, \psi|_{U \cap V}) \mid (V, \psi) \text{ } C^\infty \text{ Karte von } M\}$$

Ein konkretes Beispiel dieser Konstruktion sind die Matrixgruppen $GL(n, \mathbb{R})$ und $GL(n, \mathbb{C})$ als offene Teilmengen der Vektorräume der reellen oder komplexen $n \times n$ -Matrizen.

An dieser Stelle halten wir auch kurz fest:

- Für $U \subset \mathbb{R}^m$ offen haben wir nun zwei Definitionen von $C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$. Beide stimmen mit den beschriebenen Konventionen überein.
- Für $U \subset M$ offen hatten stimmt die Menge $C^\infty(U)$ der C^∞ Funktionen mit der Menge der C^∞ Abbildungen $C^\infty(U, \mathbb{R})$ überein.
- Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit. Dann ist jede C^∞ Karte $\phi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ a posteriori eine auch eine C^∞ Abbildung. Denn die Differenzierbarkeit der Kartendarstellungen folgt sofort aus der der Kartenwechsel.

Beispiel 9.1.3 (Produkte von C^∞ Mannigfaltigkeiten). Für gegebene C^∞ Mannigfaltigkeiten M und N ist durch

$$\{(U \times V, \phi \times \psi) \mid (U, \phi) \text{ und } (V, \psi) \text{ sind } C^\infty \text{ Karten von } M \text{ und } N\}$$

ein C^∞ Atlas von $M \times N$ gegeben.

9.1.2 Konkrete Beispiele für C^∞ Mannigfaltigkeiten

Nützliche Notation: Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

für den Vektor, der durch Auslassen der i ten Koordinate entsteht.

Beispiel 9.1.4. (Ein C^∞ Atlas für S^n) Für die Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ gibt es mehrere C^∞ Atlanten, die man kennen sollte. In [Bre93, II.4.3] wird einer über stereographische Projektion beschrieben. Ein weiterer ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \phi_i^\pm: U_i^\pm = \{x \in S^n \mid \pm x_i > 0\} &\longrightarrow B^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| < 1\}, \quad i = 1, \dots, n+1 \\ \phi_i^\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) &= (x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind bijektiv mit Inversen

$$(\phi_i^\pm)^{-1}(y) = (y_1, \dots, y_{i-1}, \pm \sqrt{1 - |y|^2}, y_i, \dots, y_n).$$

Offensichtlich ist $(\phi_i^\pm)^{-1}(y)$ als Abbildung $B^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ stetig, und sogar C^∞ . Außerdem können wir ϕ_i^\pm als Einschränkung einer C^∞ Abbildung $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ auffassen. Insbesondere erkennen wir die Kompositionen

$$\phi_i^{\pm/\mp} \circ (\phi_i^\pm)^{-1}: B^n \longrightarrow B^n$$

sofort als C^∞ Abbildungen. Da jeder Punkt von S^n in einer der Mengen U_i^\pm liegt, ist durch $\{(U_i^\pm, \phi_i^\pm)\}_{i=1, \dots, n+1}$ also ein C^∞ Atlas von S^n gegeben. Es ist leicht, zu sehen, dass dieser Atlas dieselbe C^∞ Struktur wie die stereographische Projektion beschreibt.

Beispiel 9.1.5 (Projektive Räume). Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und $\mathbb{K}P^n$ der Raum der eindimensionalen \mathbb{K} -Untervektorräume von \mathbb{K}^{n+1} topologisiert als Quotient von $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ unter der Abbildung

$$\pi: \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{K}P^n, \quad x \mapsto [x_0 : \cdots : x_n]$$

wobei $[x_0 : \cdots : x_n]$ für den durch $x = (x_0, \dots, x_n)$ aufgespannten Unterraum von \mathbb{K}^{n+1} steht. Für diese sogenannten *homogenen Koordinaten* gilt

$$[x_0 : \cdots : x_n] = [\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n], \quad \text{für alle } 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}.$$

Einen Atlas für $\mathbb{K}P^n$ erhalten wir durch

$$\begin{aligned} \phi_i: U_i &:= \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{K}P^n \mid x_i \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad i = 0, \dots, n \\ \phi_i([x_0 : \cdots : x_n]) &= \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind bijektiv mit Inversen

$$\phi_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = [y_1 : \cdots : y_{i-1} : 1 : y_i : \cdots : y_n].$$

Die Nachweise der Offenheit von $U_i \subset \mathbb{K}P^n$ und der Stetigkeit von ϕ_i und ϕ_i^{-1} sollten mittlerweile Routine sein. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ haben wir direkt einen Atlas gefunden, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ müssen wir noch \mathbb{C}^n mit \mathbb{R}^{2n} identifizieren. Die Kartenwechsel $\phi_j \circ \phi_i$ entstehen alle durch Kombination von hinzufügen oder einer Koordinate, die 1 enthält, weglassen einer Koordinate und teilen durch eine Koordinate, die ungleich Null ist. All diese Operationen sind differenzierbar.

Beispiel 9.1.6 (T^n als C^∞ Mannigfaltigkeit, vgl. [Bre93, II.4.2]). Um eine C^∞ Struktur auf dem Torus $T^n = (S^1)^n$ zu erhalten, betrachten wir

$$q: \mathbb{R}^n \longrightarrow T^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n}).$$

Wir wissen bereits, dass q stetig und offen ist. Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist q außerdem injektiv auf dem offenen Würfel

$$W_x = x + (0, 1)^n \subset \mathbb{R}^n.$$

Folglich ist $U_x = q(W_x) \subset T^n$ offen und wir erhalten Karten durch

$$\phi_x = (q|_{W_x})^{-1}: U_x \longrightarrow W_x \subset \mathbb{R}^n.$$

Man prüft nun leicht nach, dass die Kartenwechsel $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$ durch Translationen in \mathbb{R}^n gegeben sind und somit C^∞ .

9.1.3 Einige Nichtbeispiele

Beispiel 9.1.7. Wir betrachten die Menge

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\},$$

die das um 45° gedrehte Koordinatenkreuz – also in etwa den Buchstaben X – beschreibt. Hierbei sollte es sich offensichtlich nicht um eine Mannigfaltigkeit handeln, da der Nullpunkt im Gegensatz zu allen anderen Punkte nicht so aussieht als hätte er eine Umgebung, die zu \mathbb{R} homöomorph ist. Aber wir könnten wir das formal zeigen? In diesem Fall können wir mit Zusammenhang argumentieren. Man überzeugt sich leicht, dass jede Umgebung von $0 \in X$ mindestens vier Komponenten hat. Allerdings hat $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ maximal zwei Komponenten. Folglich kann $0 \in X$ keine Umgebung haben, die homöomorph zu einem Euklidischen Raum ist.

Beispiel 9.1.8. Wir erinnern uns kurz an die Gerade mit Doppelnulld

$$L = \mathbb{R} \times \{0, 1\} / \sim, \quad (x, 0) \sim (x, 1) \quad \forall x \neq 0.$$

Diese war ein Beispiel für einen T_1 Raum, der nicht Hausdorff ist. Nichtsdestotrotz ist L lokal Euklidisch und hat sogar einen C^∞ Atlas. Ein C^∞ Atlas ist gegeben durch

$$\phi_i : L \setminus \{[0, i]\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad [x, i] \rightarrow x, \quad i = 0, 1.$$

Bemerkung. Das letzte Beispiel zeigt insbesondere, dass die Existenz einer C^∞ Struktur nicht notwendigerweise zur Folge hat, dass der Raum Hausdorff ist. Dies könnte man vielleicht erwarten, da jeder Punkt eine Hausdorff Umgebung hat. Für abzählbare Basen gilt dasselbe. Beispielsweise ist jeder überabzählbare diskrete Raum eine 0-dimensionale C^∞ Mannigfaltigkeit.

9.1.4 Ein Diffeomorphismus

Beispiel 9.1.9. Wir wollen zeigen, dass betrachten die Abbildung

$$f : S^2 \longrightarrow \mathbb{C}P^1, \quad f(x, y, z) = \begin{cases} [x + iy : 1 - z], & z \neq 1 \\ [1 : 0], & z = 1. \end{cases}$$

ein Diffeomorphismus ist. Dazu brauchen wir geeignete C^∞ -Atlanten von S^2 und $\mathbb{C}P^1$. Für $\mathbb{C}P^1$ wählen wir den Atlas aus [Beispiel 9.1.5](#):

$$\begin{aligned} \phi_0 : U_0 = \mathbb{C}P^1 \setminus \{[0 : 1]\} &\longrightarrow \mathbb{C}, & \phi_0([\alpha : \omega]) &= \omega/\alpha \\ \phi_1 : U_1 = \mathbb{C}P^1 \setminus \{[1 : 0]\} &\longrightarrow \mathbb{C}, & \phi_1([\alpha : \omega]) &= \alpha/\omega \end{aligned}$$

Für S^2 schreiben wir die stereographische Projektion in komplexer Notation:

$$\begin{aligned} \sigma_N : U_N = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} &\longrightarrow \mathbb{C}, & \sigma_N(x, y, z) &= \frac{x + iy}{1 - z} \\ \sigma_S : U_S = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} &\longrightarrow \mathbb{C}, & \sigma_S(x, y, z) &= \frac{x + iy}{1 + z} \end{aligned}$$

Für die Kartenwechsel gilt dann

$$\begin{aligned} \phi_1 \circ \phi_0^{-1}(w) &= \phi_0 \circ \phi_1^{-1}(w) = \frac{1}{w} \\ \sigma_S \circ \sigma_N^{-1}(w) &= \sigma_N \circ \sigma_S^{-1}(w) = \frac{w}{|w|^2} = \frac{1}{\bar{w}}. \end{aligned}$$

Nun stellen wir fest, dass für $(x, y, z) \in U_N$ per Definition

$$f(x, y, z) = [x + iy : 1 - z] = \left[\frac{x + iy}{1 - z} : 1 \right] = \phi_1^{-1} \circ \sigma_N(x, y, z)$$

gilt und somit ist die Kartendarstellung $\phi_1 \circ f \circ \sigma_N^{-1} = \text{id}_{\mathbb{C}}$ glatt. Außerdem bildet f U_N homöomorph auf U_1 ab, und zusätzlich den fehlenden Punkt $(0, 0, 1)$ auf den einzigen Punkt $[1 : 0]$, der nicht in U_1 liegt. Damit wissen wir, dass f bijektiv ist. Um f in der Nähe von $(0, 0, 1)$ zu verstehen, betrachten wir die Kartendarstellung $\phi_0 \circ f \circ \sigma_s \phi_0 \circ f \circ \sigma_s$. Wir erhalten

$$\phi_0 \circ f \circ \sigma_s(w) = \bar{w},$$

was ebenfalls eine C^∞ Abbildung ist. Schließlich ist f^{-1} notwendigerweise gegeben durch

$$f^{-1}([\alpha : \omega]) = \begin{cases} \sigma_N^{-1} \circ \phi_1([\alpha : \omega]), & \omega \neq 0 \\ (0, 0, 1), & \omega = 0 \end{cases}$$

folgt die Differenzierbarkeit von f^{-1} analog.

9.2 Donnerstag, 18. Juni

9.2.1 Richtungsvektoren in \mathbb{R}^n

Ableitungen und Richtungsvektoren. Zur Erinnerung: Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung (im klassischen Sinn). Dann ist für $p \in U$ die *Ableitung*

$$f'(p): \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, so dass

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(p+v) - f(p) - f'(p)v}{|v|} = 0.$$

Konkret lässt sich $f'(p)v$ für $v \in \mathbb{R}^m$ als *Richtungsableitung* beschreiben:

$$f'(p)v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p+tv) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} \quad (1)$$

Im Spezialfall der Standardbasisvektoren $v = e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ erhält man die *partiellen Ableitungen*

$$f'(p)e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Für *Kurven* $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiert auf einem offenen Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, identifiziert man die lineare Abbildung $\gamma'(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ für gegebenes $t \in (a, b)$ üblicherweise mit ihrem Wert bei $1 \in \mathbb{R}$ (der kanonischen Basis von \mathbb{R}) und schreibt

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

für den sogenannten *Richtungsvektor* von γ an der Stelle $t \in (a, b)$.

Richtungsvektoren als Tangentialvektoren Wir betrachten noch einmal die Situation aus [Abschnitt 8.1.1](#). Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $g: U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ glatt und $M = \{(u, g(u)) \mid u \in U\} \subset \mathbb{R}^{k+\ell}$ der Graph von g . Für $p = (u, g(u)) \in M$ hatten wir den affinen Raum

$$T_p^{\text{affin}} M = p + T_p M, \quad \text{wobei} \quad T_p M = \{(v, g'(u)v) \mid v \in \mathbb{R}^k\} \subset \mathbb{R}^{k+\ell}$$

als anschauliches Modell für *Tangentialräume* betrachtet. Wir stellen nun fest, dass sich alle Elemente von $T_p M$ als Richtungsvektoren von Kurven in M beschreiben lassen. Genauer gilt:

$$T_p M = \{\gamma'(0) \in \mathbb{R}^{k+\ell} \mid \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{k+\ell} \text{ } C^\infty \text{ Kurve, } \varepsilon > 0, \text{ im}(\gamma) \subset M, \gamma(0) = p\}. \quad (3)$$

Denn Einerseits ist jeder Vektor der Form $(v, g'(u)v)$ der Richtungsvektor der C^∞ Kurve $t \mapsto (u+tv, g(u+tv)) \in M$ an der Stelle $t = 0$ gegeben. Andererseits sei $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{k+\ell}$ eine C^∞ Kurve, die nur Werte in M annimmt. Dann können wir für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ schreiben

$$\gamma(t) = (\bar{\gamma}(t), g(\bar{\gamma}(t)))$$

wobei $\bar{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^k$ die ersten k Koordinaten von $\gamma(t)$ enthält. Da diese C^∞ Funktionen sind, ist $\bar{\gamma}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine C^∞ Kurve in \mathbb{R}^k . Für den Richtungsvektor von γ ergibt sich damit

$$\gamma'(0) = (\bar{\gamma}'(0), (g \circ \bar{\gamma})'(0)) = (\bar{\gamma}'(0), g'(\bar{\gamma}(0))\bar{\gamma}'(0))$$

und somit $\gamma'(0) \in T_{\gamma(0)} M$.

Ableitungen in Richtung von Kurven. Die Richtungsableitungen aus (1) lassen sich allgemeiner und ohne direkten Bezug auf die lineare Struktur von \mathbb{R}^n beschreiben. Für $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ wir zuvor und eine C^∞ Kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ definieren wir die *Ableitung in Richtung γ* als

$$D_\gamma(f) = (f \circ \gamma)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)).$$

Mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$ liefert die Kettenregel

$$D_\gamma(f) = (f \circ \gamma)'(0) = f'(\gamma(0))\gamma'(0) = f'(p)v. \quad (4)$$

Die Formel aus (1) erhält man im Spezialfall der linearen Kurve $\gamma_v(t) = p + tv$.

Der Schlüssel für die Verallgemeinerung auf Mannigfaltigkeiten ist die Beobachtung, dass die der Richtungsvektor $\gamma'(0)$ und der Differentialoperator D_γ äquivalente Informationen enthalten: beide kodieren das Konzept der „Richtung“ an der Stelle $t = 0$, wenn auch auf sehr verschiedene Art und Weise.

Lemma 9.2.1. *Seien $\gamma_1, \gamma_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Dann gilt:*

$$\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0) \iff D_{\gamma_1} = D_{\gamma_2}$$

Beweis. Die Hinrichtung folgt sofort aus (4). Die Rückrichtung folgt, indem man die Auswertung von D_{γ_i} für die Koordinatenfunktionen $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_k$ betrachtet. Es gilt nämlich per Definition

$$D_{\gamma_i}(x_k) = (x_k \circ \gamma_i)'(0) = (\gamma_i)'_k(0).$$

Falls $D_{\gamma_1} = D_{\gamma_2}$, stimmen also alle Koordinaten der Vektoren $\gamma_1'(0)$ und $\gamma_2'(0)$ überein. \square

Die Moral von der Geschichte. Der Sinn und Zweck dieser Vorüberlegungen sind folgende Erkenntnisse:

- Tangentialvektoren an einen Graphen kann man sich intuitiv als Richtungsvektoren von Kurven.
- Richtungen von Kurven kann man über die Richtungsableitung auch ohne Vektorraumstruktur beschreiben.

Dies ist der Startpunkt für die Beschreibung von Tangentialvektoren an Mannigfaltigkeiten, die in [Bre93, II.5] gegeben wird.

9.2.2 Tangentialvektoren und Differentiale

Sei nun M eine m -dimensionale C^∞ Mannigfaltigkeit und $p \in M$ Für eine C^∞ Kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ und eine C^∞ Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p \in U \subset M$ offen können wir genau wie im Fall von \mathbb{R}^n eine Richtungsableitung

$$D_\gamma(f) = (f \circ \gamma)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$$

definieren.

Definition (vgl [Bre93, II.5.2&5]).

(a) Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Die Menge aller Richtungsableitungen entlang C^∞ Kurven

$$T_p M = \{D_\gamma \mid \gamma \text{ } C^\infty \text{ Kurve in } M \text{ mit } \gamma(0) = p\}$$

heißt *Tangentialraum* von M an p . Die Elemente $D_\gamma \in T_p M$ heißen *Tangentialvektoren*.

(b) Für eine C^∞ Abbildung $\theta: M \rightarrow N$ zwischen C^∞ Mannigfaltigkeiten M und N heißt die Abbildung

$$\theta_*: T_p M \longrightarrow T_{\theta(p)} N, \quad \theta_* D_\gamma := D_{\theta \circ \gamma}$$

das *Differential* von θ an der Stelle $p \in M$.

Formal ist diese Definition leicht nachzuvollziehen. Die Schwierigkeit liegt eher in der geometrischen Interpretation. Unsere Vorüberlegungen führen zu folgender Anschauung:

- Der Tangentialvektor D_γ misst die „Richtung“ oder „Geschwindigkeit“, in der p von der Kurve γ durchlaufen wird.
- Das Differential θ_* schickt die Richtung von γ durch p auf die Richtung der C^∞ Kurve $\theta \circ \gamma$ in N durch $\theta(p)$.

Insbesondere sollte man sich an dieser Stelle bewusst machen, dass die Ableitung genau dasselbe tut, nämlich Richtungen auf Richtungen abzubilden. Dies folgt aus dem mittleren Teil von (4), der besagt:

$$f'(\gamma(0))\gamma'(0) = (f \circ \gamma)'(0).$$

Keime und Derivationen Bisher ist der Tangentialräume lediglich Mengen. Wie das motivierende Beispiel die Tangentialräume an Graphen schon andeutet, haben die Tangentialräume eine natürliche Vektorraumstruktur. Um diese zu verstehen, ist folgende Sprechweise nützlich.

Definition 9.2.2. [vgl. [Bre93, II.5.3]] Gegeben seien C^∞ Mannigfaltigkeiten M und N und ein Punkt $p \in M$. Eine C^∞ *Abbildungskeim* um p ist eine Äquivalenzklasse von C^∞ Abbildungen, die offene Umgebungen von p nach N abbilden, wobei zwei solche Abbildungen denselben Keim darstellen falls sie in einer (kleineren) offenen Umgebung von p übereinstimmen. Formal:

$$\mathcal{E}_p(M, N) := \{(U, f) \mid p \in U \subset M \text{ offen, } f \in C^\infty(U, N)\} / \sim$$

wobei

$$(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2) \iff \exists p \in V \stackrel{\text{offen}}{\subset} U_1 \cap U_2: f_1|_V = f_2|_V.$$

Wenn Präzision erforderlich ist, schreiben wir Keime als $[U, f]$. In der Regel schreibt man aber einfach f und denkt sich den Definitionsbereich dazu. Im Gegensatz zu Abbildungen hat ein Keim $[U, f] \in \mathcal{E}_p(M, N)$ nur einen einzigen wohldefinierten Wert $[U, f](p) = f(p)$.

Die Sprache der Keime ist immer dann nützlich, wenn es nur darauf ankommt, dass etwas „in der Nähe“ eines Punktes definiert ist, wobei es nebensächlich ist wie nah genau man dran ist. Das kennen wir bereits von Karten, deren genaue Definitionsbereiche für abstrakte Argumente meistens eher stören als helfen. Dasselbe gilt für die Kurven und Funktionen in der Definition von Tangentialvektoren und Richtungsableitungen: um $D_\gamma(f) = (f \circ \gamma)'(0)$ zu berechnen, reicht es, f und γ nur in beliebig kleinen Umgebungen von 0, bzw. $f(p)$ zu kennen. Statt echten Kurven und Funktionen können wir also Keime von Funktionen und Kurven betrachten, genauer

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p(M) &= \mathcal{E}_p(M, \mathbb{R}) \\ \mathcal{K}_p(M) &= \{\gamma \in \mathcal{E}_p(M, \mathbb{R}) \mid \gamma(0) = p\}, \end{aligned}$$

und wir stellen fest, dass die Richtungsableitungen eine wohldefinierte Abbildung

$$\mathcal{K}_p(M) \times \mathcal{E}_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\gamma, f) \mapsto D_\gamma(f)$$

liefern und insbesondere für festes γ erhalten wir

$$D_\gamma: \mathcal{E}_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto D_\gamma(f).$$

Um die algebraische Struktur von $T_p M$ zu verstehen, stellen wir fest, dass man Funktionskeimen einige algebraische Operationen hat:

$$\begin{aligned}\lambda[U, f] &:= [U, \lambda f] \\ [U, f] + [V, g] &:= [U \cap V, f + g] \\ [U, f] \cdot [V, g] &:= [U \cap V, f \cdot g]\end{aligned}$$

Genauer gesagt ist $\mathcal{E}_p(M)$ eine \mathbb{R} -Algebra. Die Richtungsableitungen D_γ erfüllen folgende Eigenschaften:

- (1) D_γ ist \mathbb{R} -linear.
- (2) D_γ erfüllt für $f, g \in \mathcal{E}_p(M)$ die *Leibniz Regel*

$$D_\gamma(f \cdot g) = f(p) D_\gamma(g) + g(p) D_\gamma(f).$$

Diese Eigenschaften machen wir zu einer Definition.

Definition 9.2.3 (Derivationen). Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $D: \mathcal{E}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$, die Leibniz Regel $D(f \cdot g) = f(p) D(g) + g(p) D(f)$ erfüllt, heißt *Derivation* von $\mathcal{E}_p(M)$. Sei $Der_p(M)$ die Menge aller Derivationen von $\mathcal{E}_p(M)$.

Der Koordinatenformalismus

Fortsetzung folgt...

10 Woche 10

10.1 Dienstag, 23. Juni

Wird bei Gelegenheit ausführlicher nachgetragen.

10.1.1 Lokale Darstellung von Differentialen

10.1.2 Lokale Eigenschaften von C^∞ Abbildungen

Definition 10.1.1. Eine C^∞ Abbildung $\theta: M \rightarrow N$ heißt...

- (a) ... *Immersion* falls das Differential $\theta_*|_p$ an jeder Stelle injektiv ist.
- (b) ... *Submersion* falls das Differential $\theta_*|_p$ an jeder Stelle surjektiv ist.
- (c) ... C^∞ *Einbettung* falls θ eine topologische Einbettung und eine Immersion ist.

Beispiel 10.1.2. Beispiele für Immersionen und Einbettungen (siehe virtuelle Tafel)

Definition 10.1.3 (Untermannigfaltigkeiten). Sei M eine n -dimensionale C^∞ Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $S \subset M$ heißt (k -dimensionale) C^∞ *Untermannigfaltigkeit* falls es für jeden Punkt $p \in S$ eine C^∞ Karte (U, ϕ) von M gibt, so dass

$$\phi(S \cap U) \subset \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

In diesem Fall sagen wir, dass S *flach* in der Karte (U, ϕ) ist.

Achtung! Bredon gibt in II.5.7 eine etwas andere Definition. Dort definiert er „*embedded submanifolds*“ nicht als Teilmengen sondern als Einbettungen und „*submanifolds*“ als injektive Immersionen. Abgesehen davon, dass ich diese Begriffsbildung nicht überzeugend finde, verwendet Bredon selbst im weiteren Verlauf das Wort „submanifold“ fast ausschließlich im Sinne von [Definition 10.1.3](#). Meiner Überzeugung nach ist [Definition 10.1.3](#) die „richtige“ Art, um über Untermannigfaltigkeiten nachzudenken, wobei das natürlich reichlich subjektiv ist. Die nächsten Resultate zeigen, dass [Definition 10.1.3](#) äquivalent zu Bredons „*embedded submanifolds*“ sind.

Lemma 10.1.4. Sei $S \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es eine eindeutig C^∞ Struktur auf S , so dass die Inklusion $i: S \hookrightarrow M$ eine C^∞ Einbettung ist.

Korollar 10.1.5. Sei $\theta: M \rightarrow N$ eine C^∞ Einbettung. Dann ist $\theta(M) \subset N$ eine C^∞ Untermannigfaltigkeit und θ induziert einen Diffeomorphismus $M \rightarrow \theta(M)$.

10.1.3 Kritische Punkte und reguläre Werte

Definition 10.1.6. Sei $\theta: M \rightarrow N$ eine C^∞ Abbildung. Die Mengen der *kritischen Punkte* und *regulären Werte* von θ sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \text{Crit}(\theta) &:= \{p \in M \mid \theta_*: T_p M \rightarrow T_{\theta(p)} N \text{ nicht surjektiv}\} \subset M \\ \text{reg}(\theta) &:= N \setminus \theta(\text{Crit}(\theta)) \subset N \end{aligned}$$

Satz 10.1.7. [Satz über reguläre Werte, vgl. [Bre93, II.7.4]] Sei $\theta: M^m \rightarrow N^n$ eine C^∞ Abbildung und $q \in N$ ein regulärer Wert. Dann ist $\theta^{-1}(q) \subset M$ eine $(m - n)$ -dimensionale C^∞ Untermannigfaltigkeit und es für alle $p \in \theta^{-1}(q)$ gilt

$$T_p \theta^{-1}(q) \cong \ker(\theta_*: T_p M \rightarrow T_{\theta(p)} N) \subset T_p M.$$

Der Isomorphismus ist durch das Differential der Inklusion $\theta^{-1}(q) \hookrightarrow M$ gegeben.

10.2 Donnerstag, 25. Juni

Wird bei Gelegenheit ausführlicher nachgetragen.

10.2.1 Lokale Diffeomorphismen & Parametrisierungen

Definition 10.2.1.

- (a) Eine C^∞ Abbildung $\theta: M \rightarrow N$ heißt *lokaler Diffeomorphismus* falls das Differential $\theta_*: T_p M \rightarrow T_{\theta(p)} N$ für alle $p \in M$ ein Isomorphismus ist.
- (b) Eine *Parametrisierung* einer C^∞ Mannigfaltigkeit M ist ein lokaler Diffeomorphismus $P: U' \rightarrow M$ aus einer offenen Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^n$.

Beispiel 10.2.2. Polarkoordinaten in der Ebene und die zugehörigen Koordinatenvektoren (siehe virtuelle Tafel).

Beispiel 10.2.3. Parametrisierung von S^1 durch Polarkoordinaten (siehe virtuelle Tafel).

10.2.2 Beispiele für kritische Punkte und reguläre Werte

Beispiel 10.2.4. S^1 als reguläre Niveaumenge (siehe virtuelle Tafel).

Beispiel 10.2.5. Kritische Punkte der Höhenfunktion auf S^2 (siehe virtuelle Tafel).

Beispiel 10.2.6. Die orthogonale Gruppe $O(n)$ als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n \times n}$ (siehe virtuelle Tafel).

10.2.3 Der Satz von Sard

Einige Fakten aus der Maßtheorie.

Definition 10.2.7.

- (a) Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt (*Lebesgue*) *Nullmenge* falls es für alle ε eine Überdeckung von S durch abzählbar viele Würfel W_i (d.h. Produkte von Intervallen) gibt, so dass $\sum_i \text{vol}(W_i) < \varepsilon$ (wobei $\text{vol}(W_i)$ das Produkt der Intervalllängen ist).
- (b) Eine Teilmenge $S \subset N$ einer n -dimensionalen C^∞ Mannigfaltigkeit M heißt *Nullmenge* falls $\phi(S \cap U) \subset \mathbb{R}^k$ für jede C^∞ Karte von M eine Nullmenge in \mathbb{R}^n ist.

Nullmengen in \mathbb{R}^n haben folgende Eigenschaften:

- (1) Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.
- (2) Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.
- (3) Nichtleere offene Teilmengen sind keine Nullmengen
- (4) C^1 Diffeomorphismen bilden Nullmengen auf Nullmengen ab.

Wegen Eigenschaft (4) ist die [Definition 10.2.7\(b\)](#) überhaupt erst sinnvoll. Alle Eigenschaften (1)–(4) gelte analog auch für Mannigfaltigkeiten.

Lemma 10.2.8. Sei $S \subset N$ eine Nullmenge. Dann ist $N \setminus S$ dicht in N .

Der Satz von Sard

Satz 10.2.9 (Satz von Sard, vgl. [Bre93, II.6.2&3]). *Sei $\theta: M \rightarrow N$ eine C^∞ Abbildung und $C = \text{Crit}(\theta)$. Dann ist $\theta(C) \subset N$ eine Nullmenge. Insbesondere ist die Menge der regulären Werte von θ nicht leer und dicht in N .*

Korollar 10.2.10. *Sei $\theta: M \rightarrow N$ eine C^∞ Abbildung. Falls $\dim M < \dim N$, dann ist θ nicht surjektiv.*

Satz 10.2.11 (Peano). *Für jedes $n \geq 0$ gibt es eine stetige Surjektion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

Definition 10.2.12. Eine überabzählbare Mannigfaltigkeit ist ein Hausdorff Raum zusammen mit einer C^∞ Struktur.

Satz 10.2.13 (Kneser [Kne60]). *Es gibt zusammenhängende überabzählbare C^∞ Mannigfaltigkeiten V^2 und W^3 der Dimensionen 2 und 3, für die eine C^∞ Surjektion $V^2 \rightarrow W^3$ existiert.*

11 Woche 11

11.1 Dienstag, 30. Juni

Wird bei Gelegenheit nachgetragen. Bis dahin siehe virtuelle Tafeln.

11.1.1 Klassifikationsprobleme

11.1.2 Homotpie und Homotpieäquivalenz

11.2 Donnerstag, 2. Juli

Wird bei Gelegenheit nachgetragen. Bis dahin siehe virtuelle Tafeln.

11.2.1 Beispiele für Homotopieäquivalenzen

11.2.2 Die Fundamentalgruppe

12 Woche 12

12.1 Dienstag, 7. Juli

Wird bei Gelegenheit nachgetragen. Bis dahin siehe virtuelle Tafeln.

12.1.1 Abhängigkeit der Fundamentalgruppe vom Basispunkt

12.1.2 Kategorien und Funktoren

12.2 Donnerstag, 9. Juli

Wird bei Gelegenheit nachgetragen. Bis dahin siehe virtuelle Tafeln.

12.2.1 Kategorien und Funktoren (Fortsetzung)

12.2.2 Fundamentalgruppen von Produkträumen

12.2.3 Überlagerungen

13 Woche 13

13.1 Dienstag, 14. Juli

13.1.1 Hochhebungseigenschaften

Definition 13.1.1. Gegeben seien stetige Abbildungen $p: X \rightarrow Y$ und $f: W \rightarrow Y$. Eine stetige Abbildung $\tilde{f}: W \rightarrow X$ heißt *Hochhebung* von f entlang p falls $p \circ \tilde{f} = f$ gilt. Mit anderen Worten, das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ W & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Die Frage, ob eine Hochhebung existiert, beschreiben wir als Diagramm durch

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \dashrightarrow \tilde{f} & \downarrow p \\ W & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

wobei der gestrichelte Pfeil die gesuchte Abbildung andeutet.

Überlagerungen zeichnen sich durch gewisse Hochhebungseigenschaften aus. Zunächst stellen wir fest, dass Hochhebungen entlang von Überlagerungen – sofern sie existieren – auf Zusammenhangskomponenten eindeutig durch Werte an einzelnen Punkten festgelegt sind. Genauer:

Satz 13.1.2. Sei $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung und $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2: W \rightarrow X$ seien Hochhebungen einer Abbildung $f: W \rightarrow Y$. Falls W zusammenhängend ist und $\tilde{f}_1(w_0) = \tilde{f}_2(w_0)$ für ein $w_0 \in W$ gilt, so gilt $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ auf ganz W .

Beweis. Sei $W_0 = \{w \in W \mid \tilde{f}_1(w) = \tilde{f}_2(w)\}$. Per Annahme ist W_0 nichtleer. Wir zeigen, dass W_0 offen und abgeschlossen ist und somit mit W übereinstimmt (siehe [Bre93, I.4.3]). Die Abgeschlossenheit folgt im Wesentlichen aus der Hausdorff Eigenschaft von X . Letztere ist äquivalent dazu, dass die Diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ in $X \times X$ abgeschlossen ist (siehe [Bre93, I.8, Problem 5]). Durch

$$F: W \rightarrow X \times X, \quad F(w) = (\tilde{f}_1(w), \tilde{f}_2(w))$$

ist dann eine stetige Abbildung gegeben und es gilt $W_0 = F^{-1}(\Delta)$. Um zu sehen, dass W_0 offen ist, sei $w \in W_0$ beliebig und $U_w \subset Y$ eine gleichmäßig durch p überlagerte Umgebung von $f(w)$. Sei $\tilde{U}_w \subset p^{-1}(U_w)$ via p homöomorph zu U_w mit $\tilde{f}_1(w) = \tilde{f}_2(w) \in \tilde{U}_w$. Da \tilde{f}_1 und \tilde{f}_2 stetig sind, finden wir eine Umgebung $V_w \subset W$ von w mit $\tilde{f}_i(V_w) \subset \tilde{U}_w$ für $i = 1, 2$. Nun gilt aber per Annahme

$$f|_{V_w} = (p \circ \tilde{f}_i)|_{V_w} = (p|_{\tilde{U}_w}) \circ \tilde{f}_i|_{V_w}$$

und $p|_{\tilde{U}_w}$ ist ein Homöomorphismus. Wir erhalten also ein von $i = 1, 2$ unabhängige Beschreibung $\tilde{f}_i|_{V_w} = (p|_{\tilde{U}_w})^{-1} \circ f|_{V_w}$. Insbesondere gilt $V_w \subset W_0$ und da $w \in W_0$ beliebig war, schließen wir, dass W_0 offen ist. \square

Nun wenden wir uns der Existenz von Hochhebungen entlang von Überlagerungen zu.

Satz 13.1.3 (Hochhebungen von Wegen). Sei $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung. Ferner sei $\gamma: I \rightarrow Y$ ein stetiger Weg und $x_0 \in p^{-1}(\gamma(0))$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Hochhebung $\tilde{\gamma}_{x_0}: I \rightarrow X$ mit

$$p \circ \tilde{\gamma}_{x_0} = \gamma \quad \text{und} \quad \tilde{\gamma}_{x_0}(0) = x_0. \quad (5)$$

Wir nennen $\tilde{\gamma}_{x_0}$ die eindeutige Hochhebung von γ mit *Startwert* x_0 .

Beweis. Wir konstruieren $\tilde{\gamma}_{x_0}$, indem wir das Intervall I in kleinere Teilintervalle zerlegen, die von γ in gleichmäßig überlagerte Teilmengen von Y abgebildet werden. Die Eindeutigkeit folgt dann aus [Satz 13.1.2](#). Eine geeignete Zerlegung von I liefert das sogenannte *Lebesgue Lemma*, dessen Beweis kurz zurückgestellt wird.

Lemma 13.1.4 (Lebesgue Lemma für I , vgl. [\[Bre93, I.9.11\]](#)). *Sei $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von $I = [0, 1]$. Für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ gibt es für jedes $0 \leq i < n$ ein $\alpha(i) \in A$, so dass $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \subset U_{\alpha(i)}$.*

Die offenen Mengen $\gamma^{-1}(U)$, wobei $U \subset Y$ durch p gleichmäßig überlagert ist, bilden eine offene Überdeckung von I . [Lemma 13.1.4](#) liefert ein $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $0 \leq i < n$ eine gleichmäßig überlagerte Menge $U_i \subset Y$, so dass $\gamma([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subset U_i$. Sei $V_0 \subset p^{-1}(U_0)$ die offene Teilmenge, die via p homöomorph zu U_0 ist und den Punkt x_0 enthält. Dann ist

$$\tilde{\gamma}_0: [0, \frac{1}{n}] \longrightarrow X, \quad \tilde{\gamma}_0 = (p|_{V_0})^{-1} \circ \gamma$$

eine stetige Abbildung gegeben, die $p \circ \tilde{\gamma}_0 = \gamma|_{[0, 1/n]}$ und $\tilde{\gamma}_0(0) = x_0$ erfüllt. Nun sei $V_1 \subset p^{-1}(U_1)$ via p homöomorph zu U_1 mit $\tilde{\gamma}_0(1/n) \in V_1$ und

$$\tilde{\gamma}_1: [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \longrightarrow X, \quad \tilde{\gamma}_1 = (p|_{V_1})^{-1} \circ \gamma.$$

Völlig analog erhalten wir iterativ für jedes $0 \leq i < n$ stetige Abbildungen

$$\tilde{\gamma}_i: [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \longrightarrow X, \quad \tilde{\gamma}_i = (p|_{V_i})^{-1} \circ \gamma,$$

wobei V_i via p homöomorph zu U_i ist und $\tilde{\gamma}_{i-1}(i/n)$ enthält, und es gilt $\tilde{\gamma}_i(i/n) = \tilde{\gamma}_{i-1}(i/n)$ und $p \circ \tilde{\gamma}_i = \gamma$. Durch zusammenfügen der $\tilde{\gamma}_i$ erhalten wir einen stetigen Weg $\tilde{\gamma}_{x_0}: I \rightarrow X$ mit den gewünschten Eigenschaften. \square

Beweis von [Lemma 13.1.4](#): Für jedes $t \in I$ gibt es ein $\alpha(t) \in A$ und ein $\varepsilon(t) > 0$, so dass $B_{2\varepsilon(t)}(t) \subset U_{\alpha(t)}$. Da I kompakt ist, finden wir $t_1, \dots, t_r \in I$, so dass I durch die Bälle $\{B_{\varepsilon(t_i)}(t_i)\}_{i=1, \dots, r}$ überdeckt wird. Sei nun n so groß, dass $\frac{1}{n} < \min\{\varepsilon(t_i) \mid t = 1, \dots, r\}$. Für $0 \leq i < n$ und ein festes $s_i \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ wählen wir ein j , so dass $|s_i - t_j| < \varepsilon(t_j)$. Für beliebiges $t \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ gilt aber $|t - s_i| \leq \frac{1}{n}$ und die Dreiecksungleichung liefert $|t - t_j| < 2\varepsilon(t_j)$. Folglich gilt $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \subset U_{\alpha(t_j)}$. \square

Wir kommen nun zu einer unscheinbaren, aber weitreichenden Verallgemeinerung der Aussage von [Satz 13.1.3](#). Wieder beginnen wir mit etwas Terminologie, die a priori nichts mit Überlagerungen zu tun hat.

Definition 13.1.5. Eine stetige Abbildung $p: X \rightarrow Y$ hat die *Homotopiehochhebungseigenschaft (HHE)* für einen topologischen Raum W falls es für jede Homotopie $F: W \times I \rightarrow Y$ und jede stetige Abbildung $f: W \times \{0\} \rightarrow X$ eine eindeutige Homotopie $G: W \times I \rightarrow X$ gibt, so dass $G|_{W \times \{0\}} = f$ und $p \circ G = F$. Als Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} W \times \{0\} & \xrightarrow{\forall f} & X \\ \downarrow & \nearrow \exists! G & \downarrow p \\ W \times I & \xrightarrow{\forall F} & Y. \end{array} \quad (6)$$

Falls die Homotopiehochhebungseigenschaft für alle Räume W erfüllt ist, nennt man p auch eine (*Hurewicz*) *Faserung*.

Satz 13.1.6 (vgl. [Bre93, III.3.4]). *Jede Überlagerung $p: X \rightarrow Y$ hat die Homotopiehochhebungseigenschaft für beliebige topologische Räume, das heißt das Hochhebungsproblem in (6) hat eine eindeutige Lösung. Falls F eine Homotopie relativ einer Teilmenge $A \subset W$ ist, ist G ebenfalls eine Homotopie relativ A .*

Achtung! Bredon beweist die HHE in [Bre93, III.3.4] nur für lokal zusammenhängende Räume, bemerkt aber im Anschluss, dass diese Annahme fallen gelassen werden kann. Der folgende Beweis funktioniert im allgemeinen Fall.

Beweis. Die Hochhebungseigenschaft für Wege ist äquivalent zur Homotopiehochhebungseigenschaft für einpunktige Räume. Dementsprechend erhalten wir aus Satz 13.1.3 (= [Bre93, III.3.3]) für festes $w \in W$ eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $g_w: \{w\} \times I \rightarrow X$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} \{w\} \times \{0\} & \hookrightarrow & W \times \{0\} & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \searrow \exists! g_w & & \downarrow p \\ \{w\} \times I & \hookrightarrow & W \times I & \xrightarrow{F} & Y \end{array}$$

Die gesuchte Abbildung $G: W \times I \rightarrow X$ ist dann notwendigerweise durch $G(w, t) := g_w(t)$ gegeben. Falls für $a \in A \subset W$ und $t \in I$ von vornherein $F(a, t) = F(a, 0)$ gilt, das heißt $F(a, \cdot)$ eine ein konstante Kurve, so muss g_a nach Satz 13.1.3 die konstante Kurve $g_a(t) = f(a, 0)$ sein, woraus der Zusatz folgt. Es stellt sich allerdings noch die Frage nach der Stetigkeit von G . Die Argumentation benutzt ähnliche Ideen wie der Beweis von Satz 13.1.3.

Sei $w_0 \in W$ beliebig aber fest. Wir wählen eine endliche Überdeckung von $F(\{w_0\} \times I)$ durch zusammenhängende, gleichmäßig überlagerte Teilmengen von Y . Deren Vereinigung U ist eine offene Umgebung von $F(\{w_0\} \times I)$. Die Endlichkeit der Überdeckung garantiert die Existenz einer Umgebung $N \subset W$ von w_0 mit $F(N \times I) \subset U$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i < n$ setzen wir $J_{n,i} = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$. Für hinreichend großes n gibt es dann für jedes $i \in \{0, \dots, n-1\}$ eine Überdeckungsmenge $U_i \subset Y$, so dass $F(N \times J_{n,i}) \subset U_i$. Für $i = 0, \dots, n-1$ betrachten wir die Abbildungen

$$f_i: W \longrightarrow X, \quad f_i(w) = G(w, \frac{i}{n}).$$

Per Konstruktion gilt dann $f_i(N) \subset p^{-1}(U_i)$. Sei $V_i \subset p^{-1}(U_i)$ die Komponente, die $f_i(w_0)$ enthält. Per Annahme ist f_0 stetig, so dass $N_0 = N \cap f_0^{-1}(V_0)$ eine Umgebung von w_0 ist. Da $p|_{V_0}$ ein Homöomorphismus ist, ist durch

$$\tilde{G}_0: N_0 \times J_{n,0} \longrightarrow X, \quad \tilde{G}_0 = (p|_{V_0})^{-1} \circ F|_{N_0 \times J_{n,0}}$$

eine stetige Abbildung gegeben. Per Konstruktion gilt außerdem

$$p \circ \tilde{G}_0 = F|_{N_0 \times J_{n,0}} \quad \text{und} \quad \tilde{G}_0(w, 0) = f_0(w) = f(w, 0).$$

Demnach muss allerdings $\tilde{G}_0(w, t) = g_w(t) = G(w, t)$ für alle $(w, t) \in N_0 \times J_{n,0}$ gelten. Insbesondere ist G stetig auf $N_0 \times J_{n,0}$. Dieses Argument können wir nun wiederholen. Wir wissen nun, dass f_1 stetig auf N_0 ist. Folglich ist $N_1 = N_0 \cap (f_1|_{N_0})^{-1}(V_1)$ eine Umgebung von w_0 und die stetige Abbildung

$$\tilde{G}_1: N_1 \times J_{n,1} \longrightarrow X, \quad (p|_{V_1})^{-1} \circ F|_{N_1 \times J_{n,1}}$$

muss wie zuvor auf ihrem Definitionsbereich mit G übereinstimmen. Folglich ist G stetig auf $N_1 \times (J_{n,0} \cup J_{n,1})$ und f_2 ist stetig auf N_1 . Nach insgesamt n Wiederholungen erhalten wir schließlich die Stetigkeit von G auf $N_n \times I$, wobei N_n eine Umgebung von w_0 ist. Da w_0 beliebig war, ist G überall stetig. \square

13.1.2 Überlagerungen und π_1

Es stellt sich heraus, dass für einen gegebenen zusammenhängenden und lokal zusammenhängenden Hausdorff Raum Y die Menge aller Überlagerungen $p: X \rightarrow Y$ sehr eng mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(Y, y_0)$ verwandt ist. Das Zwischenspiel von Geometrie und Topologie auf der einen Seite und Algebra auf der anderen Seite, das die zentrale Idee der algebraischen Topologie darstellt, wird hier besonders deutlich. Die Homotopiehochhebungseigenschaft liefert das zentrale Bindeglied.

Korollar (vgl. [Bre93, III.3.5]). *Sei $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung und $\gamma, \gamma': I \rightarrow Y$ homotop rel ∂I . Sei $y_0 = \gamma(0) = \gamma'(0)$ und $x_0 \in p^{-1}(y_0)$. Dann sind die Hochhebungen $\tilde{\gamma}_{x_0}, \tilde{\gamma}'_{x_0}: I \rightarrow X$ mit Startwert x_0 ebenfalls homotop rel ∂I . Insbesondere gilt $\tilde{\gamma}_{x_0}(1) = \tilde{\gamma}'_{x_0}(1)$.*

Beweis. Sei $\gamma \simeq \gamma'$ rel ∂I mittels einer Homotopie $F: I \times I \rightarrow Y$ relativ zu ∂I . Wir wenden Satz 13.1.6 auf F und $f(t, 0) = \tilde{\gamma}_{x_0}(t)$ an und erhalten eine eindeutige Homotopie $G: I \times I \rightarrow X$ relativ ∂I , die das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} I \times \{0\} & \xrightarrow{(t,0) \mapsto \tilde{\gamma}_{x_0}(t)} & X \\ \downarrow & \nearrow G & \downarrow p \\ I \times I & \xrightarrow{F} & Y. \end{array}$$

Per Konstruktion gilt dann $\tilde{\gamma}_{x_0} = G(\dots, 0)$. Des weiteren gilt

$$p \circ G(\cdot, 1) = F(\cdot, 1) = \gamma'$$

und da eine Homotopie relativ ∂I vorliegt auch

$$G(0, 1) = G(0, 0) = \tilde{\gamma}_{x_0}(0) = x_0.$$

Folglich ist $G(\cdot, 1)$ eine Hochhebung von γ' mit Startwert x_0 und stimmt nach Satz 13.1.3 mit $\tilde{\gamma}'_{x_0}$ überein. \square

Eine direkte Konsequenz ist, dass der Endpunkt $\tilde{\gamma}_{x_0}(1)$ der Hochhebung von γ mit Startpunkt x_0 nur von der Homotopieklasse von γ relativ ∂I abhängt (vgl. [Bre93, III.3.8]). Dies wird später bei der Berechnung von $\pi_1(S^1)$ eine zentrale Rolle spielen. Eine weitere Konsequenz ist die Beschreibung von Bild und Kern der von Überlagerungen induzierten Abbildungen zwischen den jeweiligen Fundamentalgruppen.

Korollar (vgl. [Bre93, III.3.7]). *Sei $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung und $p(x_0) = y_0$. Dann ist*

$$p_{\#}: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

injektiv und das Bild besteht aus den Klassen $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$, für die $\tilde{\gamma}_{x_0}$ eine Schleife um x_0 ist, das heißt es gilt $\tilde{\gamma}_{x_0}(1) = \tilde{\gamma}_{x_0}(0) = x_0$.

Beweis. Offensichtlich hat jedes Element im Bild von $p_{\#}$ diese Eigenschaft. Ist umgekehrt für $\gamma: (I, \partial I) \rightarrow (Y, y_0)$ die Hochhebung $\tilde{\gamma}_{x_0}$ eine Schleife, so gilt $[\gamma] = [p \circ \tilde{\gamma}_{x_0}] = p_{\#}([\tilde{\gamma}_{x_0}])$. Nun sei $\tilde{\gamma}: (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ mit

$$1 = [c_{y_0}] = [p \circ \tilde{\gamma}] = p_{\#}([\tilde{\gamma}]) \in \pi_1(Y, y_0)$$

gegeben. Offensichtlich sind c_{x_0} und $\tilde{\gamma}$ die eindeutigen Hochhebungen von c_{y_0} und $p \circ \gamma$. Per Annahme gilt $p \circ \tilde{\gamma} \simeq c_{y_0}$ rel ∂I und [Bre93, III.3.5] liefert $\tilde{\gamma} \simeq c_{x_0}$ rel ∂I . Folglich gilt $\ker p_{\#} = \{1 = [c_{x_0}]\}$, woraus die Injektivität von $p_{\#}$ folgt. \square

Mit Hilfe der Beschreibung des Bildes können wir nun auch endlich von einigen Räumen zeigen, dass sie nicht triviale Fundamentalgruppen haben.

Korollar 13.1.7 (vgl. [Bre93, III.3.9]). *Sei Y ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Hausdorff Raum. Falls X eine nicht triviale Überlagerung hat (das heißt eine mit mindestens zwei Blättern), dann gilt $\pi_1(Y, y_0)$ für alle $y_0 \in Y$*

Beweis. Sei $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung mit mindestens zwei Blättern. Seien $x_0 \neq x_1$ zwei Punkte in $p^{-1}(y_0)$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen stetigen Weg $w: I \rightarrow X$ mit $w(0) = x_0$ und $w(1) = x_1$. Wie zuvor ist dieser die eindeutige Hochhebung von $p \circ w$ mit Startwert x_0 . Da $p(x_0) = p(x_1) = y_0$ gilt, ist $p \circ w$ eine Schleife in Y um y_0 . Da w allerdings keine Schleife in X um x_0 ist, liegt $[\gamma]$ nicht im Bild der Abbildung $p_\#: \pi_1(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, im Gegensatz zu dem neutralen Element $1 = [c_{y_0}] = p_\#([c_{x_0}])$. Folglich muss $w \neq 1$ sein. \square

Hier die versprochenen Beispiele von Räumen mit nicht trivialer Fundamentalgruppe

Beispiel 13.1.8. (1) Vom Einheitskreis S^1 kennen wir gleich mehrere nicht triviale Überlagerungen. Die Exponentialüberlagerung wird uns beim nächsten Mal helfen, $\pi_1(S^1, 1)$ konkret zu beschreiben.

- (2) Da $\pi_1(S^1, 1)$ nicht trivial ist, gilt dasselbe nach Satz 12.2.4 (vgl. [Bre93, III.2.6]) auch für $\pi_1(T^n, 1)$.
- (3) Der reell projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ hat wird von S^2 zweiblättrig überlagert, folglich ist auch $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ nicht trivial.

A Zusammenfassungen einzelner Themenbereiche

A.1 Konstruktionen mit topologischen Räumen

Hier werden im Lauf des Semester einige Abschnitte entstehen, die gewissen Themenblöcke noch einmal übersichtlich zusammenfassen.

A.1.1 Unterräume

Definition und Charakterisierung der Unterraumtopologie.

Definition A.1.1 (Unterraumtopologie). Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Die *Unterraumtopologie* auf A ist definiert als

$$V \subset A \text{ offen} \iff V = U \cap A \text{ für ein } U \subset X \text{ offen.}$$

Lemma A.1.2. Die Unterraumtopologie auf $A \subset X$ ist die kleinste Topologie, bezüglich der die Inklusionsabbildung $i: A \rightarrow X$ stetig ist.

Beweis. Für beliebige Teilmengen $S \subset X$ gilt $i^{-1}(S) = S \cap A$. □

Stetige Abbildungen in Unterräumen.

Lemma A.1.3. Sei $A \subset X$ ein Unterraum, $i: A \rightarrow X$ die Inklusionsabbildung und $f: Y \rightarrow A$ eine Abbildung in aus einem beliebigen Raum Y . Dann gilt:

$$f: Y \rightarrow A \text{ stetig} \iff i \circ f: Y \rightarrow X \text{ stetig}$$

Beweis. Dies folgt ebenfalls leicht aus der Beobachtung, dass $i^{-1}(S) = S \cap A$ für $S \subset X$. □

Stetige Abbildungen aus Unterräumen. Stetige Abbildungen aus Unterräumen lassen sich im Allgemeinen nicht einfach charakterisieren. Sei $A \subset X$ ein Unterraum und $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung in einen beliebigen Raum Y . Dann ist die Komposition $f \circ i: A \rightarrow Y$ offensichtlich auch stetig. Dies ist übrigens nichts anderes als die *Einschränkung von f auf A* und dementsprechend schreiben wir auch $f|_A = f \circ i$. In günstigen Fällen³ lässt sich jede stetige Abbildung $A \rightarrow Y$ als Einschränkung einer stetigen Abbildung $X \rightarrow Y$ schreiben. Im Allgemeinen ist dies aber nicht möglich, wie das einfache Beispiel $x \rightarrow 1/x$ als Abbildung $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ zeigt.

³Günstig wäre zum Beispiel, dass X normal und $A \subset X$ abgeschlossen ist.

A.1.2 Quotientenräume

Definition und Charakterisierung der Quotiententopologie.

Definition A.1.4. Sei Q eine Menge und $q: X \rightarrow Q$ eine surjektive Abbildung aus einem topologischen Raum X . Die Quotiententopologie auf Q bezüglich q ist wie folgt definiert:

$$U \subset Q \text{ offen} \iff q^{-1}(U) \subset X \text{ offen}$$

Allgemeiner heißt eine surjektive stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ eine *Quotientenabbildung*⁴ falls die Topologie auf Y mit der Quotiententopologie bezüglich f übereinstimmt.

Lemma A.1.5. Sei $q: X \rightarrow Q$ wie in [Definition A.1.4](#). Die Quotiententopologie auf Q ist die größte Topologie, bezüglich der q stetig ist.

Beweis. Folgt sofort aus der Definition. □

Stetige Abbildungen aus Quotienten.

Lemma A.1.6. Sei $q: X \rightarrow Q$ eine Quotientenabbildung und $f: Q \rightarrow Y$ eine aus Q in einen beliebigen Raum Y . Dann gilt:

$$f: Q \rightarrow Y \text{ stetig} \iff f \circ q: X \rightarrow Y \text{ stetig}$$

Beweis. Folgt aus $(f \circ q)^{-1}(U) = q^{-1}(f^{-1}(U))$ für offene $U \subset Y$. □

Stetige Abbildungen in Quotienten. Stetige Abbildungen in Quotientenräumen lassen sich im Allgemeinen nicht einfach charakterisieren. Sei $q: X \rightarrow Q$ eine Quotientenabbildung und $f: Y \rightarrow X$ stetig. Dann ist die Komposition $q \circ f: Y \rightarrow Q$ stetig, jedoch lässt sich nicht jede stetige Abbildung $Y \rightarrow Q$ auf diese Weise erhalten.

⁴In der Literatur findet man auch den Namen *Identifikationsabbildung*.

A.1.3 Produkte

Produkte und ihre universelle Eigenschaft. Leider sind Produkte komplizierter als man denkt, da es in der Regel viele Objekte gibt, die den Namen "Produkt" verdienen würden. Der elegante, aber anfangs wohl etwas ungewohnte Ausweg aus dieser Vieldeutigkeit ist es, sich von konkreten Modellen für Produkte zu lösen, und den Produktbegriff stattdessen auf die wesentlichen Eigenschaften zu reduzieren, die alle Modelle gemeinsam haben.

Definition A.1.7 (Topologische Produkte). Ein Produkt einer Familie $\{X_i\}_{i \in I}$ topologischer Räume ist ein topologischer Raum $\times_{i \in I} X_i$ zusammen mit einer Familie stetiger Abbildungen

$$p_i: \times_{i \in I} X_i \longrightarrow X_i,$$

genannt *Projektionen*, so dass folgende *universelle Eigenschaft* erfüllt ist:

Für jeden topologischen Raum Z und jede Familie $\{f_i: Z \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ stetiger Abbildung gibt es genau eine stetige Abbildung $f: Z \rightarrow \times_{i \in I} X_i$, so dass $f_i = p_i \circ f$ für alle $i \in I$ gilt.

Für einen $x \in \times_{i \in I} X_i$ definieren wir die *ite Komponente* als

$$x_i := p_i(x) \in X_i, \quad i \in I.$$

Die universelle Eigenschaft garantiert die vermeintliche Selbstverständlichkeit, dass Punkte in einem Produkt eindeutig durch ihre Komponenten beschrieben werden können. Tatsächlich kann man die universelle Eigenschaft letztendlich als die ultimative Manifestation genau dieser Eigenschaft auffassen.

Lemma A.1.8. Für Punkte $x, y \in \times_{i \in I} X_i$ in einem topologischen Produkt gilt:

$$\begin{aligned} x = y &\iff x_i = y_i \text{ für alle } i \in I \\ &\iff p_i(x) = p_i(y) \text{ für alle } i \in I \end{aligned}$$

Beweis. Der Übersicht halber sei $z_i = x_i = y_i$. Wir können die Punkte als Abbildungen $x, y: \{*\} \rightarrow \times_{i \in I} X_i$ aus einem einpunktigen Raum $\{*\}$ auffassen, und genauso die Komponenten $z_i: \{*\} \rightarrow X_i$. Die universelle Eigenschaft angewandt auf die Familie $\{z_i: \{*\} \rightarrow X_i\}$ liefert dann eine *eindeutige* stetige Abbildung $z: \{*\} \rightarrow \times_{i \in I} X_i$ mit $p_i \circ z = z_i$. Nun erfüllen aber $x, y: \{*\} \rightarrow \times_{i \in I} X_i$ auch diese Eigenschaft, so dass $x = z = y$ gelten muss. \square

Stetige Abbildungen in Produkten.

Lemma A.1.9. Sei $X = \times_{i \in I} X_i$ ein topologisches Produkt und Y ein beliebiger Raum. Dann gilt:

$$f: Z \rightarrow X \text{ stetig} \iff p_i \circ f: Z \rightarrow X_i \text{ für alle } i \in I$$

Beweis. Offensichtlich hat die Stetigkeit von f die von $p_i \circ f$ zur Folge. Sei umgekehrt $p_i \circ f$ für jedes $i \in I$ stetig. Die universelle Eigenschaft angewandt auf die Familie $\{p_i \circ f\}_{i \in I}$ liefert dann eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{f}: Z \rightarrow \times_{i \in I} X_i$ mit $p_i \circ \tilde{f} = p_i \circ f$. Insbesondere gilt $p_i(\tilde{f}(z)) = p_i(f(z))$ für jedes feste $z \in Z$ und **Lemma A.1.8** liefert $\tilde{f} = f$, so dass f a posteriori selbst stetig gewesen sein muss. Die andere Richtung ist offensichtlich. \square

Stetige Abbildungen aus Produkten. Abbildungen $\times_{i \in I} X_i \rightarrow Y$ aus Produkträumen lassen sich im Allgemeinen nicht ohne Weiteres durch die Komponenten/Projektionen charakterisieren. Die Probleme werden schon für Abbildungen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deutlich. Man könnte naiv vermuten, dass f stetig ist falls für feste $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Abbildungen $f(\cdot, y), f(x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ allesamt stetig sind. Dies ist allerdings nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Existenz und Eindeutigkeit von Produkten. Wir beweisen nun folgenden Satz:

Satz A.1.10 (Existenz und Eindeutigkeit von Produkten). *Jede Familie $\{X_i\}_{i \in I}$ hat ein Produkt. Je zwei Produkte sind kanonisch homöomorph.*

Beweis (Eindeutigkeit): □

Beweis (Existenz für endliche Produkte): Für eine endliche Indexmenge I wählen wir eine Bijektion $\phi: \{1, \dots, n\} \rightarrow I$ und schreiben kurz $X_i = X_{\phi(i)}$. Das übliche Modell für ein Produkt ist die Grundmenge

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i\}$$

zusammen mit den Projektionen

$$p_i: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_i, \quad p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i.$$

Damit diese stetig sind, müssen alle Mengen der Form $p_i^{-1}(U_i)$ mit festem $i \in I$ und offenem $U_i \subset X_i$ offen in $X_1 \times \cdots \times X_n$ sein. Als *Produkttopologie* wählen wir die von diesen Mengen erzeugte Topologie und stellen fest, dass die "Rechteckmengen" der Form $U_1 \times \cdots \times U_n$ mit $U_i \subset X_i$ offen eine Basis der Topologie bilden.

Für den Nachweis der universellen Eigenschaft seien Abbildungen $f_i: Z \rightarrow X_i$ gegeben. Wir definieren dann

$$f: Z \longrightarrow X_1 \times \cdots \times X_n, \quad f(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z)).$$

Offensichtlich gilt $p_i \circ f = f_i$ und f ist die einzige Abbildung mit dieser Eigenschaft. Schließlich gilt für feste $i \in I$ und offene $U_i \subset X_i$

$$f^{-1}(p_i^{-1}(U_i)) = (p_i \circ f)^{-1}(U_i) = f_i^{-1}(U_i) \subset Z.$$

Da f_i per Annahme stetig ist, ist $f_i^{-1}(U_i)$ offen in Z und da die Mengen der Form $p_i^{-1}(U_i)$ eine Subbasis der Produkttopologie auf $\times_{i \in I} X_i$ bilden, folgt die Stetigkeit von f aus [Bre93, §I.2, Problem 4]. □

Beweis (Existenz für beliebige Produkte): Als Grundmenge für ein Produkt betrachten wir

$$\times_{i \in I} X_i := \{f: I \rightarrow \cup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i\}$$

und als Projektionen wählen wir die Auswertabbildungen

$$p_i: \times_{i \in I} X_i \longrightarrow X_i, \quad p_i(f) = f(i) \in X_i.$$

Auf $\times_{i \in I} X_i$ betrachten wir die kleinste Topologie, bezüglich der alle Projektionen stetig sind. Eine Subbasis für die Topologie ist gegeben durch Mengen der Form $p_i^{-1}(U_i)$ wobei $i \in I$ und $U_i \subset X_i$ offen sind.

Für den Nachweis der universellen Eigenschaft sei $f_i: Z \rightarrow X_i$ eine Familie von Abbildungen. Für festes $z \in Z$ definieren wir

$$f_z: I \longrightarrow \cup_{i \in I} X_i, \quad f_z(i) := f_i(z).$$

Per Definition gilt dann $f_z \in \times_{i \in I} X_i$ und wir setzen

$$f: Z \longrightarrow \times_{i \in I} X_i, \quad f(z) = f_z.$$

Ausschreiben der Definitionen liefert

$$(p_i \circ f)(z) = f_z(i) = f_i(z)$$

und offensichtlich ist f die einzig mögliche Abbildung mit dieser Eigenschaft. Schließlich gilt für feste $i \in I$ und offene $U_i \subset X_i$

$$f^{-1}(p_i^{-1}(U_i)) = (p_i \circ f)^{-1}(U_i) = f_i^{-1}(U_i) \subset Z.$$

Da f_i per Annahme stetig ist, ist $f_i^{-1}(U_i)$ offen in Z und da die Mengen der Form $p_i^{-1}(U_i)$ eine Subbasis der Produkttopologie auf $\times_{i \in I} X_i$ bilden, folgt die Stetigkeit von f aus [Bre93, §I.2, Problem 4]. \square

A.1.4 Topologische Summen

Topologische Summen und ihre universelle Eigenschaft.

Definition A.1.11 (Topologische Summen). Eine *topologische Summe* einer Familie $\{X_i\}_{i \in I}$ topologischer Räume ist ein topologischer Raum $\coprod_{i \in I} X_i$ zusammen mit einer Familie stetiger Abbildungen

$$j_i: X_i \longrightarrow \coprod_{i \in I} X_i,$$

genannt *Inklusionen*, so dass folgende *universelle Eigenschaft* erfüllt ist:

Für jeden topologischen Raum Z und jede Familie $\{f_i: X_i \rightarrow Z\}_{i \in I}$ stetiger Abbildung gibt es genau eine stetige Abbildung $f: \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow Z$, so dass $f_i = f \circ j_i$ für alle $i \in I$ gilt.

Abbildungen aus topologischen Summen.

Lemma A.1.12. Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume und $f: \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow Y$ eine Abbildung in einen beliebigen Raum Y . Dann gilt:

$$f: \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow Y \text{ stetig} \iff f \circ j_i: X_i \rightarrow Y \text{ stetig für alle } i \in I$$

Beweis. Angenommen jedes $f \circ j_i$ sei stetig. Die universelle Eigenschaft angewandt auf die Familie $\{f \circ j_i\}_{i \in I}$ liefert eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{f}: \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow Y$ mit $\tilde{f} \circ j_i = f \circ j_i$ für alle $i \in I$. Es stellt sich heraus, dass die Inklusionen j_i injektiv sind und dass jeder Punkt von $\coprod_{i \in I} X_i$ im Bild einer Inklusion liegt (siehe [Satz A.1.13](#)). Folglich muss $f = \tilde{f}$ gelten und f muss bereits stetig gewesen sein. Die andere Richtung ist offensichtlich. \square

Abbildungen in topologische Summen. Abbildungen $Y \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$ in topologische Summen lassen sich nicht so einfach charakterisieren.

Existenz und Eindeutigkeit topologischer Summen.

Satz A.1.13 (Existenz und Eindeutigkeit topologischer Summen).

- (i) Jede Familie $\{X_i\}_{i \in I}$ topologischer Räume besitzt eine Summe. Je zwei Summen sind kanonisch homöomorph.
- (ii) Die Inklusionen $j_i: X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$ sind injektiv, offen und abgeschlossen. Ihre Bilder $j_i(X_i)$ sind offen, abgeschlossen und paarweise disjunkt in $\coprod_{i \in I} X_i$.

Beweis. Das Standardmodell der Summe beginnt mit der disjunkten Vereinigung von Mengen

$$\coprod_{i \in I} X_i = \{(x_i, i) \mid x_i \in X_i, i \in I\} = \bigcup_{i \in I} X_i \times \{i\}.$$

Die Inklusionen sind gegeben durch

$$j_i: X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i, \quad j_i(x_i) = (x_i, i).$$

Auf $\coprod_{i \in I} X_i$ wählen wir die kleinste Topologie, bezüglich der alle Inklusionen stetig sind. Es gilt dann:

$$U \subset \coprod_{i \in I} X_i \text{ offen} \iff j_i^{-1}(U) \subset X_i \text{ offen für alle } i \in I$$

Offensichtlich sind j_i injektiv mit Bild $j_i(X_i) = X_i \times \{i\}$, insbesondere sind $j_i(X_i)$ und $j_k(X_k)$ für $i \neq k$ disjunkt. Dementsprechend ist $j_k^{-1}(j_i(X_i))$ für $k \neq i$ leer und für $k = i$ ganz X_i , also in jedem Fall offen und abgeschlossen in X_k . Folglich ist $j_i(X_i)$ für jedes $i \in I$ offen und abgeschlossen in $\coprod_{i \in I} X_i$. Ebenso sieht man leicht, dass das Bild jeder offenen oder abgeschlossenen Menge in X_i unter j_i offen bzw. abgeschlossen in $\coprod_{i \in I} X_i$ ist.

Für den Nachweis der universellen Eigenschaft seien $f_i: X_i \rightarrow Z$ stetig. Wir definieren

$$f: \coprod_{i \in I} X_i \longrightarrow Z, \quad f(x_i, i) = f_i(x_i),$$

was offensichtlich die einzige Abbildung mit der Eigenschaft $f_i = f \circ j_i$ für alle $i \in I$ ist. Die Stetigkeit von f ist leicht nachzuweisen. Somit ist gezeigt, dass $(\coprod_{i \in I} X_i, \{j_i\}_{i \in I})$ eine topologische Summe ist. Für jede weitere Summe $(\coprod'_{i \in I} X_i, \{j'_i\}_{i \in I})$ liefern die universellen Eigenschaften angewandt auf die Familien $\{j_i: X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i\}_{i \in I}$ und $\{j'_i: X_i \rightarrow \coprod'_{i \in I} X_i\}_{i \in I}$ inverse Homöomorphismen ϕ und ϕ' , so dass folgendes Diagramm für jedes $i \in I$ kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 & X_i & \\
 j_i \swarrow & & \searrow j'_i \\
 \coprod_{i \in I} X_i & \xrightarrow{\phi} & \coprod'_{i \in I} X_i \\
 & \cong & \\
 & \xleftarrow{\phi'} &
 \end{array}$$

Insbesondere gelten die im Standardmodell nachgewiesenen Eigenschaften der Inklusionen für jede topologische Summe. \square

B Zur Prüfungsvorbereitung

Im Folgenden sind alle Abschnitte aus [\[Bre93\]](#) und diesen Notizen aufgelistet, die für die Abschlussprüfung relevant sind. Dazu gehören auch einige der Aufgaben an den Enden der Kapitel in [\[Bre93\]](#). Einige davon wurden in der Vorlesung oder auf den Übungsblättern behandelt. Andere sind potentielle Klausuraufgaben. Ebenso ist jede der Übungsaufgaben (inklusive der Kurzfragen) eine potentielle Klausuraufgabe, eventuell in leicht abgewandelter Form.

I.1 Metrische Räume

Fließtext: Ganzes Kapitel.

Aufgaben: Die Aussagen von Problem 1 und Problem 2 sollte man kennen und zumindest Problem 1 aus dem Stand beweisen können.

I.2 Topologische Räume

Fließtext: Alles bis auf Beispiel 8 auf S. 6, Definition I.2.11 und Theorem I.2.12. Für Definition I.2.14 siehe auch [Abschnitt 2.2.1](#).

Aufgaben: Die Aussagen von Problem 1 und Problem 4 sollte man kennen und beweisen können.

Ergänzende Notizen: [Abschnitte 2.1.3](#) und [2.2.1](#)

I.3 Unterräume

Fließtext: Ganzes Kapitel.

Aufgaben: Problem 1, Problem 2 und Problem 8 sollte man kennen und beweisen können.

Ergänzende Notizen: [Abschnitte 2.1.5](#) und [2.1.6](#), sowie [Anhang A.1.1](#).

I.4 Zusammenhang

Fließtext: Alles bis einschließlich Proposition I.4.10.

Aufgaben: Den Inhalt von Problem 1, Problem 2 und insbesondere Problem 5 sollte man kennen, ebenso die Beweisideen (siehe Notizen).

Ergänzende Notizen: [Abschnitte 3.2.1](#), [3.2.2](#), [4.1.1](#) und [4.1.2](#)

I.5 Trennung

Fließtext: Ganzes Kapitel

Aufgaben: Problem 5 sollte man aus dem Stegreif beweisen können. Die Aussage von Problem 9 und die Beweisidee sollten bekannt sein (siehe [Lemma 4.2.1](#)). Problem 6 sollte man beweisen können.

Ergänzende Notizen: [Abschnitte 4.2.1](#) und [5.1.2](#)

I.6 Netze und Konvergenz

Fließtext: Alles bis einschließlich Proposition I.6.10.

Aufgaben: Keine.

Ergänzende Notizen: [Abschnitt 5.1.1](#)

I.7 Kompaktheit

Fließtext: Alles bis auf Theorem I.7.14.

Aufgaben: Problem 1 sollte man lösen können.

Ergänzende Notizen: [Abschnitte 6.1.1](#) bis [6.1.3](#) und [6.2.2](#)

I.8 Produkte

Fließtext: Alles außer der Beweis von Theorem I.8.9 (Tychonoff für beliebige Produkte).

Aufgaben: Die Aussage von Problem 3 sollte bekannt sein (vgl. [Lemma 4.1.7](#)), ebenso Problem 9 (vgl. [Satz 4.1.8](#)). Die Aussage von Problem 5 sollte man kennen und beweisen können. Problem 6 sollte man lösen können.

Ergänzende Notizen: [Abschnitte 2.2.3, 2.2.4](#) und [4.1.3](#), siehe auch [Anhänge A.1.3](#) und [A.1.4](#).

I.9 Mehr über metrische Räume

Fließtext: Alles zum Thema Metrisierbarkeit (Definition I.9.5 bis einschließlich Theorem I.9.10).

Aufgaben: Problem 4 und Problem 5 sollte man lösen können. Die Beweisidee für Problem 1 sollte bekannt sein (vgl. [Lemma 7.1.2](#)).

Ergänzende Notizen: [Abschnitt 7.1.2](#)

I.10 Existenz stetiger Funktionen

Fließtext: Bis einschließlich Korollar I.10.3. Die Aussage von Theorem I.10.4 sollte man kennen.

Aufgaben: Keine.

Ergänzende Notizen: [Abschnitt 7.1.3](#)

I.11 Lokal kompakte Räume

Fließtext: Definition I.11.1 und Theorem I.11.2 (vgl. [Satz 7.1.5](#)) sollten bekannt sein. Proposition I.11.5 sollte man ohne Bezug auf Theorem I.11.4 beweisen können. Die Beweisidee von Theorem I.11.10 sollte man verstanden haben (vgl. [Lemma 7.1.3](#)).

Aufgaben: Keine.

Ergänzende Notizen: [Abschnitt 7.1.3](#)

I.13 Quotientenräume

Fließtext: Alles bis einschließlich Proposition I.13.14.

Aufgaben: Problem 4 sollte bekannt sein. Problem 1, Problem 2 und Problem 6 sollte man lösen können.

Ergänzende Notizen: [Abschnitte 2.2.2, 3.1.1, 4.1.3](#) und [5.1.3](#), siehe auch [Abschnitte 6.1.3](#) und [7.2.1](#) sowie [Anhang A.1.2](#).

I.14 Homotopie

Fließtext: Alles außer die Sätze I.14.18 und I.14.19.

Aufgaben: Die Probleme 1, 2, 3, 8 und 9 sollte man lösen können.

Ergänzende Notizen: ????

II.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Fließtext: Hier sind die Notizen relevanter als das Buch. Wichtig sind die Definitionen II.2.1 und II.2.5 und deren Bedeutung.

Aufgaben: Keine.

Ergänzende Notizen: Sämtliche Begriffe und Aussagen aus den [Abschnitte 7.2.2](#) und [8.1.2](#) sollten bekannt sein. Insbesondere sollte ein Bewusstsein für das Dimensionsproblem vorhanden sein.

II.3 Lokale Koordinaten

Fließtext: Ganzes Kapitel.

Aufgaben: Keine.

Ergänzende Notizen: Details folgen.

II.4 Beispiele differenzierbarer Mannigfaltigkeiten.

Fließtext: Alle Beispiele von Karten und Atlanten. Die funktionalen Strukturen können ignoriert werden.

Aufgaben: Problem 1 und Problem 2 sollte man lösen können.

Ergänzende Notizen: [Abschnitte 9.1.1](#) bis [9.1.4](#).

II.5 Tangentialvektoren

Fließtext: Alles bis auf Punkte (3) und (4) in Definition II.5.7 (siehe dazu [Definition 10.1.3](#)).

Aufgaben: Problem 1 und Problem 2 sollte man lösen können.

Ergänzende Notizen: [Abschnitte 9.2](#) und [10.1.1](#)

II.6 Reguläre Werte und der Satz von Sard

Fließtext: Definition II.6.1 und die Aussage von Theorem II.6.2 (Satz von Sard) sollten bekannt sein (siehe auch [Definition 10.1.6](#) und [Satz 10.2.9](#)).

Aufgaben: Problem 1–3 sowie Problem 5 und Problem 6 sollte man lösen können.

Ergänzende Notizen: [Abschnitte 10.1.3](#) und [10.2.3](#)

II.7 Lokale Eigenschaften von Immersionen und Submersionen

Fließtext: Bis einschließlich Beispiel II.7.5. Insbesondere sollte man die Aussagen von Theorem II.7.1 und Theorem II.7.3 verinnerlichen und die Beweisidee verstehen.

Aufgaben: Problem 1 sollte man lösen können.

Ergänzende Notizen: [Abschnitt 10.1.2](#)

III.2 Die Fundamentalgruppe

Details folgen.

III.3 Überlagerungen

Details folgen.

Literatur

- [Bre93] G. E. Bredon, *Topology and geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 139, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [Che92] P. R. Chernoff, *A simple proof of Tychonoff's theorem via nets*, American Mathematical Monthly **99** (1992), no. 10, 932–934.
- [Kne60] M. Kneser, *Beispiel einer dimensionserhöhenden analytischen Abbildung zwischen überabzählbaren Mannigfaltigkeiten*, Archiv der Mathematik **11** (1960), 280–281.
- [Mil56] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Annals of Mathematics. Second Series **64** (1956), 399–405.
- [Sco05] A. Scorpan, *The wild world of 4-manifolds*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. MR2136212 (2006h:57018)