Geometrie und Topologie (SoSe 2020)

— Übungsblatt 1 —

Aufgabe 1.1 (Die Französische Eisenbahnmetrik). Für je zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^2$ sei

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{falls } x \text{ und } y \text{ auf derselben Geraden durch den Ursprung liegen} \\ |x| + |y| & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist und beschreiben Sie die ε -Bälle um die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 0)$.
- (b) Zeigen Sie, dass d auf den Einheitskreis $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$ die diskrete Topologie induziert.

Aufgabe 1.2. Sei X ein topologischer Raum.

- (a) Die Menge der abgeschlossenen Teilmenge von X erfüllt folgende Eigenschaften:

- (1) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.
- (2) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Teilmengen ist abgeschlossen.
- (3) Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

- (b) Sei $\mathcal{N}(x)$ die Menge aller Umgebungen von $x \in X$. Dann gilt:

$$U \subset X \text{ ist offen} \iff U \in \mathcal{N}(x) \text{ für alle } x \in U$$

Mit anderen Worten, eine Teilmenge von X ist genau dann offen wenn sie eine Umgebung aller ihrer Punkte ist.

(Hinweis: Arbeiten Sie nur mit den abstrakten Definitionen (siehe Bredon I.2.1 und I.2.3). Metriken und ε -Bälle helfen nicht.)

Aufgabe 1.3 (Vorgeschriebene Umgebungsbasen). Sei X eine Menge und für jedes $x \in X$ sei eine Menge $\mathcal{B}_x$ von Teilmengen von X gegeben, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Es gilt $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$ und $x \in B$ für alle $B \in \mathcal{B}_x$.
- (2) Für alle $B, C \in \mathcal{B}_x$ gibt es ein $D \in \mathcal{B}_x$ mit $D \subset B \cap C$. ($\leftarrow$ Tippfehler korrigiert!)
- (3) Für alle $B \in \mathcal{B}_x$ gibt es ein $B_0 \in \mathcal{B}_x$, so dass $B_0 \subset B$ und

$$\forall y \in B_0 \exists B_y \in \mathcal{B}_y : B_y \subset B_0$$

Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte Topologie of X gibt, für die $\mathcal{B}_x$ für jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis ist.

(Hinweis: Aufgabe 1.2(b) und die Definition von Umgebungsbasen weisen den Weg zur einzig möglichen Topologie. Insbesondere stellt sich heraus, dass die Menge B_0 in (3) offen sein muss.)