Geometrie und Topologie (SoSe 2020)

— Übungsblatt 2 —

Aufgabe 2.1 (Inneres und Abschluss). Sei X ein topologischer Raum und $A, B \subset X$ Teilmengen.

(a) Für $x \in X$ sei $\mathcal{T}(x)$ die Menge aller offenen Teilmengen $U \subset X$ mit $x \in U$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}\text{int}(A) &= \{x \in X \mid \exists U \in \mathcal{T}(x): U \subset A\} \\ \bar{A} &= \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{T}(x): U \cap A \neq \emptyset\}\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass A genau dann offen (bzw. abgeschlossen) ist, wenn $A = \text{int}(A)$ (bzw. $A = \bar{A}$).

(c) Zeigen Sie, dass $X \setminus \text{int}(A) = \overline{X \setminus A}$ und $X \setminus \bar{A} = \text{int}(X \setminus A)$.

(d) Beweisen Sie die Identitäten und Inklusionen

$$\begin{aligned}\text{int}(A \cap B) &= \text{int}(A) \cap \text{int}(B) & \overline{A \cap B} &\subset \bar{A} \cap \bar{B} \\ \text{int}(A \cup B) &\supset \text{int}(A) \cup \text{int}(B) & \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cup \bar{B}\end{aligned}$$

und zeigen Sie durch Angabe von Beispielen, dass die Inklusionen strikt sein können.

Aufgabe 2.2 (Separable metrische Räume). Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann eine abzählbare Basis der Topologie besitzt wenn es eine abzählbare Teilmenge $A \subset X$ gibt, deren Abschluss der ganze Raum ist (d.h. $\bar{A} = X$). Solche metrischen Räume nennt man auch *separabel*.

Aufgabe 2.3 (Verkleben stetiger Abbildungen). Seien X, Y topologische Räume, $A, B \subset X$ abgeschlossene Teilmengen mit $X = A \cup B$, und

$$f: A \rightarrow Y \quad \text{und} \quad g: B \rightarrow Y$$

stetige Abbildungen bezüglich der Unterraumtopologien auf A und B , so dass

$$f(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in A \cap B.$$

Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $h: X \rightarrow Y$ gibt, so dass

$$h|_A = f \quad \text{und} \quad h|_B = g.$$