Geometrie und Topologie (SoSe 2020)

— Übungsblatt 3 —

Aufgabe 3.1 (Intervalle sind zusammenhängend)**.** Zeigen Sie, dass das Einheitsintervall $[0,1]$ zusammenhängend ist. Folgern Sie, dass auch beliebige Intervalle[1] in $\mathbb{R}$ zusammenhängend sind.

Aufgabe 3.2 ($\mathbb{R}$ ist kein Produkt)**.**

(a) Seien X und Y zusammenhängende Räume mit jeweils mindestens zwei Punkten. Zeigen Sie, dass $X \times Y \setminus \{(x,y)\}$ für alle $(x,y) \in X \times Y$ zusammenhängend ist.

(b) Angenommen das Produkt $X \times Y$ zweier topologischer Räume sei homöomorph zu $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass entweder X oder Y aus nur einem Punkt besteht und der jeweils andere Raum homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist. *(Hinweis: Wenn Sie Teil (a) benutzen wollen, müssen Sie zunächst zeigen, dass X und Y zusammenhängend sind. Das ist nicht vorausgesetzt.)*

Aufgabe 3.3 (Lokal wegzusammenhängende Räume)**.** Ein topologischer Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend* falls es für jedes $x \in X$ und jede Umgebung N von x eine wegzusammenhängende Umgebung V von x mit $V \subset N$ gibt.

(a) Sei X lokal wegzusammenhängend. Zeigen Sie, dass die Wegkomponenten von X sowohl offen als auch abgeschlossen sind und mit den Komponenten von X übereinstimmen.

(b) Sei X der Unterraum von $\mathbb{R}^2$ gegeben durch die Vereinigung der Geraden $\{1/n\} \times \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und den Koordinatenachsen, das heißt

$$X = \big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{1/n\} \times \mathbb{R}\big) \cup \big(\{0\} \times \mathbb{R}\big) \cup \big(\mathbb{R} \times \{0\}\big) \subset \mathbb{R}^2.$$

Ist X wegzusammenhängen und/oder lokal wegzusammenhängend? Begründen Sie Ihre Antworten. *(Hinweis: Malen Sie sich ein Bild von X.)*

[1] Beliebige Intervalle heißt $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ und (a,b), wobei die offenen Intervallgrenzen $\pm\infty$ sein können.