Geometrie und Topologie (SoSe 2020)

— Übungsblatt 4 —

Aufgabe 4.1 (Produkte erben Wegzusammenhang)**.** Sei $\{X_i\}_{i\in I}$ eine beliebige Familie nicht leerer Räume. Sei $X = \times_{i\in I} X_i$ ein Produkt mit Projektionen $p_i\colon X \to X_i$. Zeigen Sie:

(a) Eine Abbildung $f\colon Z \to X$ aus einem topologischen Raum Z ist genau dann stetig, wenn die Kompositionen $p_i \circ f\colon Z \to X_i$ für alle $i \in I$ stetig sind.

(b) Falls X_i für alle $i \in I$ wegzusammenhängend ist, so ist auch das Produkt $X = \times_{i\in I} X_i$ wegzusammenhängend.

(Hinweis: Wenn Ihnen unendliche Produkte suspekt sind, versuchen Sie zumindest, die Aussagen für endliche Produkte zu beweisen. Dies führt allerdings zu Punktabzug. Für Teil (b) versuchen Sie, wenn möglich, mit der universellen Eigenschaft des Produkts zu argumentieren.)

Aufgabe 4.2 ($T_2 \neq T_3$)**.** Sei X als Menge $\mathbb{R}^2$, jedoch mit der Topologie, die von den Euklidischen Bällen $B_\varepsilon(x)$ und zusätzlich den Mengen

$$\Theta_\varepsilon = \big\{(x,y) \,\big|\, x^2+y^2 < \varepsilon, \quad y \neq 0\big\} \cup \{(0,0)\}, \quad \varepsilon > 0$$

erzeugt wird. Zeigen Sie, dass X Hausdorffsch, aber nicht regulär ist.

Aufgabe 4.3 (Noethersche Räume)**.** Ein topologischer Raum heißt *Noethersch*[1] wenn jede absteigende Folge abgeschlossener Mengen $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ schließlich konstant wird (d.h es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so das $A_n = A_N$ für alle $n \geq N$). Sei X ein Noetherscher Hausdorff Raum. Zeigen Sie, dass X endlich und diskret ist.
(Hinweis: Sie dürfen die Aussagen der Aufgaben am Ende von Kapitel I.5 bei Bredon benutzen, sofern Sie diese beweisen.)

[1] Der Namensgebung ist der kommutativen Algebra entnommen. Paradebeispiele für Noethersche Räume sind Spektren von Noetherschen Ringe mit der Zariski Topologie.