Geometrie und Topologie (SoSe 2020)

— Übungsblatt 5 —

Aufgabe 5.1 (Manchmal geht es auch ohne Netz)**.** Sei X ein topologischer Raum, in dem jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt (d.h. X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom). Zeigen Sie:

(a) Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ in einen beliebigen Raum Y ist stetig falls für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X, die gegen ein $x \in X$ konvergiert, die Bildfolge $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ in Y gegen $f(x)$ konvergiert.

(b) Für jede Teilmenge $A \subset X$ ist der Abschluss $\overline{A}$ die Menge aller Grenzwerte von Folgen in A, die als Netze in X konvergieren.

(Hinweis: Orientieren Sie sich an den Beweisen von Proposition I.6.6 und I.6.7 bei Bredon.)

Aufgabe 5.2 (Die Wahrheit über punktweise Konvergenz)**.**

(a) Sei $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $X = \times_{i\in I} X_i$ ihr Produkt. Zeigen Sie, dass ein Netz $\Phi\colon D \to X$ genau dann gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert, wenn die Kompositionen $\Phi_i = p_i \circ \Phi\colon D \to X_i$ für alle $i \in I$ gegen $x_i = p_i(x) \in X_i$ konvergieren.

(b) Fassen Sie die Menge aller Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ als Produktraum $\mathbb{R}^{[0,1]} = \times_{t\in[0,1]}\mathbb{R}$ auf. Folgern Sie, dass eine Funktionenfolge $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, genau dann punktweise konvergiert wenn Sie als Netz in $\mathbb{R}^{[0,1]}$ konvergiert.

(Bemerkung: Punktweise Konvergenz hat also etwas mit überabzählbaren Produkten zu tun, die topologisch und analytisch nicht ganz unproblematisch sind. Das ist letztendlich der Grund, warum punktweise Konvergenz alleine in der Analysis kaum interessante Konsequenzen hat.)

Aufgabe 5.3 (Forschung im Kleinen)**.** In der Vorlesung haben wir den reell Projektiven Raum $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ als Quotienten von $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ topologisiert. Lässt sich die Quotiententopologie auf $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ auch durch eine Metrik beschreiben? Begründen Sie Ihre Antwort.

(Bemerkung: Die Ungewissheit ist hier Teil der Aufgabe. Sie müssen entweder eine Metrik konstruieren, die die Topologie induziert, oder der Topologie von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ eine Eigenschaft nachweisen, die die Existenz einer solchen Metrik ausschließt. Welche Option ist richtig? Finden Sie es heraus!)