

Geometrie und Topologie (SoSe 2020)

— Übungsblatt 6 —

Aufgabe 6.1 (Einbettungen). Vorweg etwas Terminologie. Ein topologischer Raum heißt *lokal kompakt* falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat.

- (a) Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig, injektiv und eigentlich, wobei X beliebig und Y ein lokal kompakter Hausdorff Raum ist. Zeigen Sie, dass f eine Einbettung ist.
- (b) Handelt es sich bei der folgenden Abbildung um eine Einbettung? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$f: [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(t) = \begin{cases} t \exp\left(\frac{i}{t}\right) & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

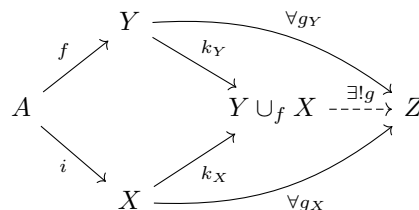
Aufgabe 6.2 (Vier Arten den Torus zu beschreiben). Zeigen Sie, dass die folgenden Räume homöomorph sind:

- Das Produkt $T_1 = S^1 \times S^1$.
- Der Quotient $T_2 = \mathbb{R}^2 / \sim$ wobei $x \sim y$ falls $x - y \in \mathbb{Z}^2$.
- Der Quotient $T_3 = [0, 1]^2 / \sim$ wobei $(0, t) \sim (1, t)$ und $(t, 0) \sim (t, 1)$ für alle $t \in [0, 1]$.
- Der Unterraum $T_4 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2-\sin\beta}} (\sin\alpha, \cos\alpha, \cos\beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ von $\mathbb{R}^3$.

(Bemerkung: Den Raum T_3 kann man sich als ein Quadrat vorstellen, bei dem man die gegenüberliegenden Seiten identifiziert hat (siehe Bredon, S. 44). Versuchen Sie, sich den Raum T_4 zu veranschaulichen. Probieren Sie es erst per Hand und zur Not mit Hilfe eines Computers.)

Aufgabe 6.3 (Ankleben). Seien X, Y, Z beliebige Räume, $A \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum und $f: A \rightarrow Y$ stetig. Wie immer sei $i: A \rightarrow X$ die Inklusion.

- (a) Zeigen Sie, dass die Anklebekonstruktion $Y \cup_f X$ zusammen mit den Abbildungen k_X und k_Y folgendes universelle Problem löst:



Im Detail: für alle Paare von Abbildungen $g_Y: Y \rightarrow Z$ und $g_X: X \rightarrow Z$ mit $g_Y \circ f = g_X \circ i$ gibt es genau eine stetige Abbildung $g: Y \cup_f X \rightarrow Z$ gibt, so dass $g_X = g \circ k_X$ und $g_Y = g \circ k_Y$.

- (b) Sei $f: S^1 \rightarrow S^1$ gegeben durch $f(z) = z^2$ wobei $S^1 \subset \mathbb{C}$ als Menge der komplexen Zahlen mit Betrag 1 aufgefasst wird. Zeigen Sie, dass $S^1 \cup_f D^2$ homöomorph zu $\mathbb{RP}^2$ ist.

(Bemerkung: Teil (i) sagt hochtrabend, dass die Anklebenkonstruktion ein sogenannter „Push-out“ in der Kategorie der topologischen Räume ist.)