Geometrie und Topologie (SoSe 2020)

— Übungsblatt 8 —

Aufgabe 8.1 (Stereographische Projektion)**.** Unter de *Nord-* und *Südpol* der n–Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ verstehen wir die Punkte

$$N = (0, \dots, 0, 1) \quad \text{und} \quad S = (0, \dots, 0, -1).$$

Zeigen Sie, dass für jedes $x \in S^n \setminus \{N\}$ die Gerade durch N und x genau einen Schnittpunkt mit der Hyperebene $\{x_{n+1} = 0\}$ hat, und genauso für S anstelle von N. Seien $\sigma_N(x) \in \mathbb{R}^n$ und $\sigma_S(x) \in \mathbb{R}^n$ die Projektionen der Schnittpunkte auf die ersten n Koordinaten. Zeigen Sie, dass die sogenannten *stereographischen Projektionen*

$$\begin{aligned} \sigma_N \colon U_N &:= S^n \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \sigma_N(x) \\ \sigma_S \colon U_S &:= S^n \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \sigma_S(x) \end{aligned}$$

Homöomorphismen sind – insbesondere also Karten von S^n – und dass die Kartenwechsel gegeben sind durch

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \arrow[r, bend left, "\sigma_N \circ \sigma_S^{-1}"] & \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \arrow[l, bend left, "\sigma_S \circ \sigma_N^{-1}"] \end{tikzcd} \qquad \sigma_N \circ \sigma_S^{-1}(y) = \frac{y}{|y|^2} = \sigma_S \circ \sigma_N^{-1}(y).$$

Folgern Sie, dass $\{(U_N, \sigma_N), (U_S, \sigma_S)\}$ ein differenzierbarer Atlas von S^n ist.

(Bonusfrage: Gibt es einen Atlas von S^n mit nur einer Karte? Dafür ein Extrapunkt.)

Aufgabe 8.2 (C^1 Invarianz von Gebieten und Randpunkten)**.**

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass jede stetig differenzierbare Injektion $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ eine offene Abbildung ist.

(b) Sei $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$ der *n–dimensionale Halbraum* und $\partial H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ sein Rand. Zeigen Sie, dass jeder Diffeomorphismus $h \colon H^n \to H^n$ Randpunkte auf Randpunkte und innere Punkte auf innere Punkte abbildet.

(Bemerkung: Eine Abbildung $f \colon H^n \to H^n$ heißt differenzierbar wenn es für jeden Punkt $x \in H^n$ eine offene Umgebunge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine differenzierbare Abbildung $\widetilde{f} \colon U \to \mathbb{R}^n$ gibt, die auf $U \cap H^n$ mit f übereinstimmt. Die Aussagen gelten auch für stetige Injektionen und Homöomorphismen, sind aber deutlich schwieriger zu beweisen.)

Aufgabe 8.3 (Die zwei Definitionen von Mannigfaltigkeiten)**.** Bredons Argumentation, dass die Beschreibungen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten über Karten (Definition II.2.1) und funktionale Strukturen (Definition II.2.4) äquivalent sind, ist an einigen Stellen unvollständig. Finden und füllen Sie die Lücken.