Geometrie und Topologie (SoSe 2020)

— Übungsblatt 9 —

Aufgabe 9.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $g\colon U \to \mathbb{R}^\ell$ glatt[1]. Sei $M = \{(u, g(u)) \mid u \in U\} \subset \mathbb{R}^{k+\ell}$ der Graph von g und für $p = (u, g(u)) \in M$ sei

$$T_pM = \left\{(v, g'(u)v) \,\middle|\, v \in \mathbb{R}^k\right\} \subset \mathbb{R}^{k+\ell}.$$

Zeigen Sei, dass T_pM mit der Menge aller Richtungsvektoren an C^∞ Kurven durch p mit Bild in M übereinstimmt, das heißt

$$T_pM = \left\{\gamma'(0) \in \mathbb{R}^{k+\ell} \,\middle|\, \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m \ \mathrm{C}^\infty \text{ Kurve}, \ \varepsilon > 0, \ \mathrm{im}(\gamma) \subset M, \ \gamma(0) = p\right\}.$$

(Bemerkung: In der Vorlesung hatten wir bisher zur Veranschaulichung mit dem affinen Tangentialraum $T_p^{\text{affin}}M = p + T_pM$ gearbeitet. Ab jetzt betrachten wir aber stets den zugrundeliegenden Vektorraum T_pM.)

Aufgabe 9.2 (Differenzierbarkeit und Differentiale)**.** Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to N$ stetig. Zeigen Sie:

(a) f ist genau dann glatt[2] wenn es für jeden Punkt $p \in M$ glatte Karten (U, ϕ) von M um p und (V, ψ) von N um $f(p)$ gibt, so dass die Kartendarstellung $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ glatt ist.

(b) Sei f glatt und für $p \in M$ seien glatte Karten $\phi = (x_1, \dots, x_m)$ um p und $\psi = (y_1, \dots, y_n)$ um $f(p)$ gegeben ($m = \dim M$ und $n = \dim N$). Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "L_\phi"', "\cong"] & T_{f(p)}N \arrow[d, "L_\psi", "\cong"'] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "\left(\psi\circ f\circ\phi^{-1}\right)'(\psi(p))"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Hierbei sind L_ϕ und L_ψ die Isomorphismen, die die Koordinatenvektoren $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p$ und $\frac{\partial}{\partial y_i}\big|_p$ jeweils auf den $i$ten Vektor den Standardbasis von $\mathbb{R}^m$, bzw. $\mathbb{R}^n$ schicken. Insbesondere ist das Differential f_* an der Stelle p genau dann injektiv, surjektiv oder ein Isomorphismus, wenn die gewöhnliche Ableitung $\left(\psi \circ f \circ \phi^{-1}\right)'(\psi(p))$ einer beliebigen Kartendarstellung die jeweilige Eigenschaft hat.

Aufgabe 9.3 (Tangentialräume von S^2)**.**

(a) Zeigen Sie, dass die Polarkoordinatenabbildung

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad h(\varphi, \theta) = \left(\cos\varphi \sin\theta, \, \sin\varphi \sin\theta, \, \cos\theta\right).$$

als Abbildung nach S^2 glatt ist und das Differential h_* an jeder Stelle ein Isomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Inklusion $i\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar und i_* an jeder Stelle injektiv. Fassen Sie T_pS^2 via i_* und der Identifikation $T_p\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ (siehe Bredon II.5.4) als Unterverktorraum von $\mathbb{R}^3$ auf und zeigen Sie

$$T_pS^2 = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \langle p, v\rangle = 0\right\}.$$

[1] Zur Erinnerung: *glatt* ist gleichbedeutend mit C^∞.

[2] im Sinne von Bredon II.2.5., das heißt *alle* Kartendarstellungen sind glatt.