Geometrie und Topologie (SoSe 2020)

— Übungsblatt 10 —

Aufgabe 10.1 (Was ist das?). Betrachten Sie die Funktion

$$f(x, y, z) = (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2$$

auf dem Komplement der z -Achse in $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f . Zeigen Sie, dass 1 ein regulärer Wert ist und geben Sie einen Diffeomorphismus zwischen $f^{-1}(1)$ und einer bekannten C^∞ Mannigfaltigkeit an.

(Hinweis: Man kann in kartesischen Koordinaten arbeiten, muss es aber nicht.)

Aufgabe 10.2 (Generische Projektionen). Für $v \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ beschreibt

$$p_v: \mathbb{R}^4 \longrightarrow H_v = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \langle x, v \rangle = 0\}, \quad p_v(x) = x - \langle x, v \rangle v$$

bekanntermaßen die orthogonale Projektion auf das orthogonale Komplement von v . Sei $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^4$ eine C^∞ Einbettung mit Bild $C = f(S^1) \subset \mathbb{R}^4$.

(a) Zeigen Sie, dass die Komposition $p_v \circ f: S^1 \rightarrow H_v$ genau dann eine C^∞ Einbettung ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Für alle $x, y \in C$ mit $x \neq y$ gilt $v \notin \mathbb{R}(x - y)$, das heißt $x - y$ ist nicht parallel zu v .
- (2) Für alle $x \in C$ gilt $v \notin T_x C$, das heißt v ist nirgends tangential zu C .

(b) Zeigen Sie, dass es ein $v \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ gibt, dass die Bedingungen in (a) erfüllt.

(Hinweis: Es hilft, die Unterräume $\mathbb{R}(x - y)$ und $T_x C$ von $\mathbb{R}^4$ als Punkte in $\mathbb{R}P^3$ aufzufassen.)

Aufgabe 10.3 (Die symplektische Gruppe). Die *symplektische Gruppe* ist definiert als

$$Sp(2n) = \{A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid A^t \Omega A = \Omega\}$$

wobei $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ und $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix ist. Zeigen Sie, dass $Sp(2n)$ eine C^∞ Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ist und bestimmen Sie die Dimension.