Geometrie und Topologie (SoSe 2020)

— Übungsblatt 11 —

Aufgabe 11.1 (∞ vs. Θ). Zeigen Sie, dass die Einpunktvereinigung¹ $S^1 \vee S^1$ homotopieäquivalent zu dem Unterraum $\Theta = S^1 \cup \{(x, 0) \mid x \in [-1, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 11.2 (Topologische Gruppen). Eine *topologische Gruppe* ist ein Hausdorff Raum G zusammen mit einer Gruppenstruktur, so dass die Gruppenoperation $(g, h) \mapsto gh$ und die Inversion $g \mapsto g^{-1}$ als Abbildungen $G \times G \rightarrow G$ und $G \rightarrow G$ stetig sind.

(a) Für zwei Schleifen $\alpha, \beta: (I, \partial I) \rightarrow (G, e)$ sei

$$\alpha \bullet \beta: (I, \partial I) \longrightarrow (G, e), \quad \alpha \bullet \beta(t) = \alpha(t) \beta(t)$$

das punktweise Produkt in G . Zeigen Sie, dass $\alpha \bullet \beta \simeq \alpha * \beta \text{ rel } \partial I$.

(b) Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ Abelsch ist.

Die letzte Aufgabe für dieses Semester ist etwas umfangreicher. Ziel ist im wesentlichen die Klassifikation kompakter 1-dimensionaler topologischer Mannigfaltigkeiten. Mehr dazu in den Tutorien. Bearbeiten Sie so viele Teile wie Sie können. Sobald Sie vier schaffen, haben Sie den Soll erfüllt. Jeder weitere Teil liefert Ihnen einen Bonuspunkt. Weitere Hilfestellung finden Sie in dem Artikel [Gal87] (VPN nicht vergessen). Viel Erfolg!

Aufgabe 11.3 (Klassifikation 1-dimensionaler Mannigfaltigkeiten). Sei M eine zusammenhängende, kompakte 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass M homöomorph zu S^1 ist. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

- (1) M hat einen endlichen Atlas aus Karten $\phi_i: U_i \xrightarrow{\cong} (0, 1)$, $i = 1, \dots, r$, so dass $U_i \setminus U_j \neq \emptyset$ für alle $i \neq j$ (oder äquivalent $U_i \not\subseteq U_j$).
- (2) Sei x_n eine Folge in $U_i \cap U_j$, die in M gegen $x \in U_j \setminus U_i$ konvergiert. Dann hat $\phi_i(x_n)$ keine konvergente Teilfolge in $(0, 1)$.
- (3) Für gegebene $i \neq j$ sei Z eine Komponente von $U_i \cap U_j$. Dann hat $\phi_i(Z) \subset (0, 1)$ die Form $(0, a)$ oder $(a, 1)$ für ein $a \in (0, 1)$.
- (4) Für gegebene $i \neq j$ hat $U_i \cap U_j$ höchstens zwei Komponenten.
- (5) Falls $U_i \cap U_j$ für ein Paar $i \neq j$ zusammenhängend ist, ist $U_i \cup U_j$ homöomorph zu $(0, 1)$.
- (6) Falls $U_i \cap U_j$ für ein Paar $i \neq j$ zwei Komponenten hat, ist $U_i \cup U_j$ homöomorph zu S^1 .
- (7) M ist homöomorph zu S^1 ist.

[Gal87] D. Gale, *The Teaching of Mathematics: The Classification of 1-Manifolds: A Take-Home Exam*, Amer. Math. Monthly **94** (1987), no. 2, 170–175, available at <http://dx.doi.org/10.2307/2322421>.

¹Die Einpunktvereinigung $X \vee Y$ punktierter Räume (X, x_0) und (Y, y_0) alternativ als Quotient der Summe $X + Y$ beschreiben, in dem man die Basispunkte identifiziert, oder als Unterraum $X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$ von $X \times Y$ (siehe Bredon I.13, Problem 8).