Geometrie und Topologie II (WiSe 2020/2021)

— Übungsblatt 1 —

Aufgabe 1.1 (Die Tychonoff Topologie)**.** Die *Tychonoff Topologie* auf der Menge $C(X, Y)$ entsteht, in dem man $C(X, Y)$ als Unterraum von $\mathrm{Abb}(X, Y)$ mit der Produkttopologie auffasst.[1] Welche der Implikationen in Bredon VII.2.4 (vgl. Satz 1.2.5 aus der Vorlesung) gelten analog für die Tychonoff Topologie? Geben Sie Beweise oder Gegenbeispiele an.

Aufgabe 1.2 (Wie kompakt ist $C(I, I)$?)**.** Sei $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall. Zeigen Sie, dass $C(I, I)$ bezüglich der kompakt-offen Topologie nicht kompakt ist. Wie sieht es mit der Tychonoff Topologie aus Aufgabe 1.1 aus?

(Hinweis: Sie dürfen auch Aussagen in Bredon VII.2 benutzen, die nicht in der Vorlesung behandelt wurden.)

Aufgabe 1.3 (Quotienten und Produkte)**.** Sei $p\colon X \to Y$ eine Quotientenabbildung[2] und Z stark lokal kompakt[3]. Zeigen Sie, dass die Produktabbildung

$$p \times \mathrm{id}_Z \colon X \times Z \longrightarrow Y \times Z$$

wieder eine Quotientenabbildung ist.

(Bemerkung: Naiv würde man die Aussage wahrscheinlich auch für beliebiges Z nicht hinterfragen. Es gibt allerdings Beispiele, die zeigen, dass eine Zusatzannahme tatsächlich nötig ist.)

[1] Zur Erinnerung: $\mathrm{Abb}(X, Y)$ ist das Standardmodell des Produkts von „X-vielen Kopien von Y“. Die Produktprojektionen sind die Auswerteabbildungen $p_x\colon \mathrm{Abb}(X, Y) \to Y$, $p_x(f) = f(x)$ für $x \in X$.

[2] Siehe Bredon I.13.4 oder Definition B.2.3 in den Ergänzenden Notizen.

[3] Zur Erinnerung: *stark lokal kompakt* heißt, dass alle Punkte Umgebungsbasen aus kompakten Mengen besitzen.