Geometrie und Topologie II (WiSe 2020/2021)

— Übungsblatt 2 —

Aufgabe 2.1 (Abbildungen aus Summen und in Produkte). Für eine Familie $\{Y_i\}_{i\in I}$ topologischer Räume seien $j_i \colon Y_i \to \coprod_i Y$ die Inklusionen in die topologische Summe und $p_i \colon \prod_i Y_i \to Y_i$ die Projektionen des topologischen Produkts. Zeigen Sie:

(a) Für jeden Raum Z ist die kanonische Abbildung

$$C\big(\coprod_i Y_i, Z\big) \longrightarrow \prod_i C(Y_i, Z), \quad f \mapsto \{f \circ j_i\}_{i\in I}$$

ein Homöomorphismus.

(b) Für jeden Raum X ist die kanonische Abbildung

$$C\big(X, \prod_i Y_i\big) \longrightarrow \prod_i C(X, Y_i), \quad f \mapsto \{p_i \circ f\}_{i\in I}$$

eine stetige Bijektion. Falls X stark lokal kompakt ist, ist sie ein Homöomorphismus.

Aufgabe 2.2 (Schleifenraum und Einhängungen). Sei X ein punktierter Raum und $\eta \colon I \to S^1 \subset \mathbb{C}$ gegeben durch $\eta(x) = e^{2\pi i x}$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung

$$\Omega X = C_*(S^1, X) \longrightarrow C(I, \partial I; X, x_0), \quad \lambda \mapsto \lambda \circ \eta$$

ist ein Homöomorphismus bezüglich der kompakt-offen Topologien.

(b) Die Komposition $X \times I \xrightarrow{\mathrm{id}\times\eta} X \times S^1 \xrightarrow{q} X \wedge S^1$ ist eine Quotientenabbildung und induziert einen Homöomorphismus

$$SX = X \wedge S^1 \approx (X \times I)/(X \times \partial I \cup \{x_+\} \times S^1).$$

Aufgabe 2.3 (Funktoren via Homotopie). Sei $(H, \bullet, \hat{\ })$ eine H-Gruppe und (C, γ, i) eine H-Kogruppe. Zeigen Sie, dass für jede punktierte stetige Abbildung $f \colon X \to Y$ durch

$$\begin{aligned} f^* \colon [Y, H]_* &\longrightarrow [X, H]_*, \quad f^*[h] = [h \circ f] \quad \text{und} \\ f_* \colon [C, X]_* &\longrightarrow [C, Y]_*, \quad f_*[g] = [f \circ g] \end{aligned}$$

Gruppenhomomorphismen gegeben sind. Folgern Sie, dass durch $X \mapsto [C, X]$ und $f \mapsto f_*$ ein kovarianten Funktor $Top \to Grp$ definiert wird, und durch $X \mapsto [X, H]$ und $f \mapsto f^*$ ein kontravarianter Funktor.