Geometrie und Topologie II (WiSe 2020/2021)

— Übungsblatt 3 —

Aufgabe 3.1 (Die Homotpiesequenz, Teil 1)**.** Zeigen Sie, dass die Homotopiesequenz eines punktierten Raumpaares (X, A, x_0) für $n \geqslant 1$ exakt bei $\pi_n(X)$ ist, das heißt in der Sequenz

$$\pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0)$$

gilt $\mathrm{im}(i_*) = \ker(j_*)$ (bzw. $\mathrm{im}(i_*) = j_*^{-1}(*)$ für $n = 1$).

(Hinweis: Der Beweis von Theorem VII.5.8 bei Bredon enthält die wesentlichen Ideen. Führen Sie die Argumente etwas detaillierter aus.)

Aufgabe 3.2 (Die Homotopiesequenz, Teil 2)**.** Sei (X, A) ein punktiertes Raumpaar, so dass die Abbildung $i_* \colon \pi_1(A) \to \pi_1(X)$ injektiv ist. Zeigen Sie, dass $\pi_2(X, A)$ Abelsch ist.

Aufgabe 3.3 (Exakte Sequenzen von Vektorräumen)**.** Sei $\boldsymbol{k}$ ein Körper und für $n \geqslant 0$ sei

$$0 \longrightarrow V_0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz endlich dimensionaler $\boldsymbol{k}$–Vektorräumen. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(V_i) = 0.$$