Geometrie und Topologie II (WiSe 2020/2021)

— Übungsblatt 4 —

Aufgabe 4.1 (Die Kleinsche Flasche)**.** Die *Kleinsche Flasche* beschreibt man gewöhnlich als Quadrat, bei dem gegenüberliegende einmal in gleicher und einmal in umgekehrter Richtung identifiziert werden. Diese Vorstellung wird durch den Quotientenraum

$$K = [0,1]^2/\sim \quad \text{mit} \quad (x,1) \sim (x,0) \quad \text{und} \quad (1,y) \sim (0,1-y) \quad \text{für alle } x,y \in [0,1]$$

formalisiert. Zeigen Sie, dass K der Totalraum eines Faserbündels mit Basis S^1 und typischer Faser S^1 ist.

Aufgabe 4.2 (Sphärenbündel über Sphären)**.** Sei $p\colon Y \to S^m$ ein Faserbündel mit typischer Faser S^n. Berechnen Sie mit den Ihnen zu Verfügung stehenden Informationen so viele Homotopiegruppen von Y wie möglich. Was können Sie im Fall der Projektion $S^m \times S^n \to S^m$ zusätzlich sagen?

(Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\pi_k(S^\ell) = 0$ für $k < \ell$ und $\pi_\ell(S^\ell) \cong \mathbb{Z}$ für alle $\ell \geqslant 1$.)

Aufgabe 4.3 (Pullbacks von Faserungen und Faserbündeln)**.** Gegeben seien zwei stetige Abbildungen $p\colon Y \to B$ und $f\colon A \to B$. Der *Pullback von p entlang f* ist definiert als

$$f^*Y := \{(y,a) \in Y \times A \,|\, p(y) = f(a)\} \xrightarrow{f^*p} A, \quad f^*p(y,a) := a.$$

Zeigen Sie:

(a) Falls p eine Hurewicz Faserung ist, so gilt dasselbe für f^*p. Analog für Serre Faserungen.

(b) Falls p ein Faserbündel mit typischer Faser F ist, so gilt dasselbe für f^*p.

(Hinweis: Zusätzlich zu der Abbildung $f^*p\colon f^*Y \to A$, die durch die Projektion $Y \times A \to A$ gegeben ist, liefert die andere Projektion eine Abbildung $f^*Y \to Y$.)