Geometrie und Topologie II (WiSe 2020/2021)

— Übungsblatt 5 —

Aufgabe 5.1 (Frei und eigentlich diskontinuierlich)**.** Sei G eine diskrete Gruppe, die stetig von links auf einem Hausdorff Raum X wirkt. Zeigen Sie:

(a) Falls G endlich und die Wirkung frei ist, so ist sie eigentlich diskontinuierlich.

(b) Konstruieren Sie eine freie, stetige Wirkung von $\mathbb{Z}^2$ auf $\mathbb{R}$ und zeigen Sie an Hand der Definition, dass sie nicht eigentlich diskontinuierlich ist.

(Hinweis: Aufgabe 5.2 garantiert, dass die Wirkung in (b) nicht eigentlich diskontinuierlich ist – egal welche Sie hinschreiben. Führen Sie den Nachweis dennoch per Hand!)

Aufgabe 5.2 (Was wirkt auf $\mathbb{R}$?)**.** Sei $G \neq 1$ eine diskrete Gruppe, die stetig und eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{R}$ wirkt. Zeigen Sie, dass $G \cong \mathbb{Z}$.

Aufgabe 5.3 (Spaß mit Quaternionen)**.** Die *Hamiltonschen Quaternionen* sind die reelle Algebra $\mathbb{H}$ mit $\mathbb{R}$–Basis $1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ und Multiplikation gegeben durch bilineare Fortsetzung der Relationen

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1.$$

Bekanntermaßen bilden die Quaternionen einen *Schiefkörper*: jedes $q \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$ hat ein multiplikatives Inverses q^{-1}, aber die Multiplikation ist nicht kommutativ. Wir identifizieren $\mathbb{H}$ wie folgt mit $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbb{H} \ni q = t1 + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \;\mapsto\; (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

Durch $|q| = \sqrt{q^*q}$ wird dann die Euklidische Norm beschrieben, wobei $q^* = t - x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$ der *konjugierte* Quaternion ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Sp}(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$ der *Einheitsquaternionen* bezüglich der Multiplikation eine Untergruppe von $\mathbb{H}\backslash\{0\}$ ist.

(b) Finden Sie eine endliche, nicht kommutative Untergruppe $H \subset \mathrm{Sp}(1)$, die via Multiplikation von links

$$H \times \mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{Sp}(1), \quad (h, q) \mapsto hq$$

frei auf $\mathrm{Sp}(1) \approx S^3$ wirkt. Folgern Sie, dass es punktierte Räume gibt, deren Fundamentalgruppen nicht Abelsch sind.