Geometrie und Topologie II (WiSe 2020/2021)

— Übungsblatt 6 —

Aufgabe 6.1 (Verkappte Linsenräume)**.** Sei $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear, beschrieben eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass A eine stetige Abbildung $f\colon S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ induziert. Identifizieren Sie die Abbildung $f_*\colon \pi_1(S^1 \times S^1) \to \pi_1(S^1 \times S^1)$ mit $A\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$. Wählen Sie dazu eine geeignete Darstellung von $S^1 \times S^1$ mit geeignetem Basispunkt.

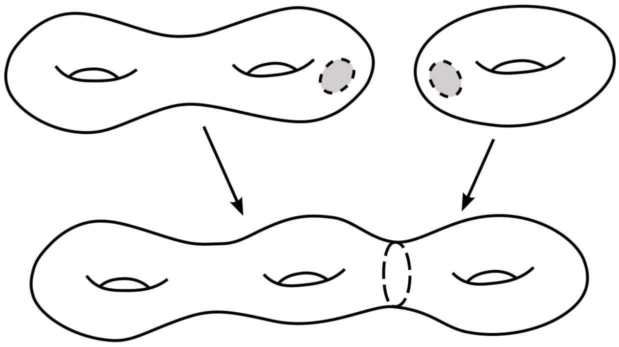
(b) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von $X = (D^2 \times S^1) \cup_f (S^1 \times D^2)$ in Abhängigkeit von $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

(Bemerkung: Für invertierbares A ist X homöomorph zu einem 3-dimensionalen Linsenraum $L(p, q)$. Wissen Sie welcher? Auch wenn es nicht Teil der Aufgabe ist, denken Sie einmal darüber nach.)

Aufgabe 6.2 (Nochmal $\pi_{<n}(S^n)$)**.** Vergessen Sie vorübergehend alles, was Sie bisher für $n \geqslant 2$ und $0 < k \leqslant n$ über $\pi_k(S^n)$ wissen.

(a) Zeigen Sie mit dem Satz von Seifert–van Kampen, dass $\pi_1(S^n) = 1$ für $n \geqslant 2$. Illustrieren Sie außerdem am Beispiel von S^1 die Notwendigkeit der Voraussetzung des Satzes, dass $U \cap V$ wegzusammenhängend ist.

(b) Beweisen Sie dem Satz von Blakers–Massey, dass $\pi_i(S^n) = 0$ für $i < n$ und dass die Abbildung $\sigma\colon \pi_i(S^n) \to \pi_{i+1}(S^{n+1})$ für $i \leqslant 2n - 2$ bijektiv und für $i = 2n - 1$ surjektiv ist.



Aufgabe 6.3 (Zusammenhängende Summen)**.** Seien M und N zusammenhängende C^∞ Mannigfaltigkeiten der selben Dimension n. Die *zusammenhängende Summe* $M\#N$ entsteht, indem man M und N „mit einem Schlauch verbindet" (siehe Bild). Formal wählt man dazu C^∞ Einbettungen $h_M\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow M$ und $h_N\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow N$ (z. B. Inverse von C^∞ Karten) und verklebt $M^\circ = M\backslash\{h_M(0)\}$ und $N^\circ = N\backslash\{h_N(0)\}$ wie folgt mit Hilfe des Diffeomorphismus $y \mapsto= y/|y|^2$ von $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, der intuitiv eine Spiegelung an der Einheitssphäre darstellt:

$$M\#N := (M^\circ + N^\circ)/\sim \quad \text{mit} \quad h_M(y) \sim h_N(y/|y|^2) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n\backslash 0$$

Als Basispunkte dienen für ein festes $\xi_0 \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ die Punkte

$$x_0 := h_M(\xi_0) \in M, \quad y_0 := h_N(\xi_0) \in N \quad \text{und} \quad z_0 := [h_M(\xi_0)] = [h_N(\xi_0)] \in M\#N.$$

Zeigen Sie: für $n \geqslant 3$ ist $\pi_1(M\#N)$ das freie Produkt von $\pi_1(M)$ und $\pi_1(N)$:

$$\pi_1(M\#N) \cong \pi_1(M) * \pi_1(N).$$