Geometrie und Topologie II (WiSe 2020/2021)

— Übungsblatt 7 —

Aufgabe 7.1 (Spaltungen)**.** Gegeben sei eine kurze exakte Sequenzen von Abelschen Gruppen

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(1) Es gibt einen Homomorphismus $r\colon B \to A$ mit $r \circ \alpha = \mathrm{id}_A$, genannt *linke Spaltung*.

(2) Es gibt einen Homomorphismus $s\colon C \to B$ mit $\beta \circ s = \mathrm{id}_C$, genannt *rechte Spaltung*

(3) Es gibt einen Isomorphismus $\phi\colon A \oplus C \xrightarrow{\cong} B$, genannt *Spaltung*, der folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_A"] \arrow[u, "\mathrm{id}_A"] & A \oplus C \arrow[r, "p_C"] \arrow[u, "\phi"] & C \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id}_C"] & 0
\end{tikzcd}$$

Hierbei sind i_A und p_C die Inklusionen in und Projektionen aus der direkten Summe.

Man sagt, die Sequenz *spaltet*, falls eine dieser Bedingungen erfüllt ist.

(b) Sei C isomorph zu $\mathbb{Z}^n$. Zeigen Sie, dass jede kurze exakte Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ spaltet. Geben Sie außerdem eine kurze exakte Sequenz an, die nicht spaltet.

Aufgabe 7.2 (Homologie und Einhängungen)**.** Für einen topologischen Raum X sei die *unreduzierte Einhängung* ΣX definiert als Quotient von $X \times I$, in dem $X \times \{0\}$ und $X \times \{1\}$ jeweils zu einem Punkt identifiziert werden. Für stetiges $f\colon X \to Y$ induziert $f \times \mathrm{id}\colon X \times I \to Y \times I$ eine stetige Abbildung $\Sigma f\colon \Sigma X \to \Sigma Y$. *(Kein Beweis nötig!)*

Konstruieren Sie für jede Homologietheorie $h_* = \{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ Isomorphismen

$$\sigma_n^X\colon \tilde{h}_n(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_{n+1}(\Sigma X), \quad n \in \mathbb{Z}$$

die in dem Sinne *natürlich* sind, dass für stetiges $f\colon X \to Y$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{h}_n(\Sigma X) \arrow[r, "\sigma_n^X"] \arrow[d, "f_*"] & \tilde{h}_{n+1}(\Sigma X) \arrow[d, "(\Sigma f)_*"] \\
\tilde{h}_n(\Sigma Y) \arrow[r, "\sigma_n^Y"] & \tilde{h}_{n+1}(\Sigma Y)
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 7.3 (Reduzierte Additivität)**.** Sei h_* eine Homologietheorie. Zur Erinnerung: für einen nicht leeren Raum X sei $\epsilon\colon X \to P$ die eindeutige Abbildung in einer Einpunktraum P und

$$\tilde{h}_n(X) = \ker\big(h_n(X) \xrightarrow{\epsilon_*} h_n(P)\big), \quad n \in \mathbb{Z}$$

die *reduzierte Homologie*. Ferner seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume, so dass $\{x_0\}$ ein starker Deformationsretrakt (siehe Bredon I.14.8) einer abgeschlossenen Umgebung $N \subset X$ ist. Zeigen Sie:

(a) Die Inklusion $\{y_0\} \hookrightarrow Y$ induziert Isomorphismen

$$\tilde{h}_n(Y) \xrightarrow{\cong} h_n(Y, \{y_0\}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(b) Die Inklusionen $i_X\colon X \to X \vee Y$ und $i_Y\colon Y \to X \vee Y$ induzieren Isomorphismen

$$\tilde{h}_n(X) \oplus \tilde{h}_n(Y) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_n(X \vee Y), \quad n \in \mathbb{Z}.$$