Geometrie und Topologie II (WiSe 2020/2021)

— Übungsblatt 8 —

Abgabetermin: Sonntag, der 3. Januar (Ende der Weihnachtspause)

Aufgabe 8.1 (Homologie und Fixpunkte)**.** Zeigen Sie für $n \geqslant 0$:

(a) Sei $f\colon S^n \to S^n$ eine Abbildung ohne Fixpunkte. Dann gilt $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.

(b) Jede Abbildung $f\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{2n} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2n}$ hat einen Fixpunkt.

Aufgabe 8.2 (Freie Gruppenwirkungen auf Sphären)**.** Sei G eine nicht triviale Gruppe, die frei und stetig auf S^{2n} wirkt. Zeigen Sie, dass G isomorph zu $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sein muss.

(Nebeinbei: Im Zusammenhang von Überlagerungen hatten wir bereits freie Wirkungen anderer Gruppen auf Sphären ungerader Dimension kennengelernt. Auch diese Gruppen kann man klassifizieren, aber die Liste ist etwas länger.)

Aufgabe 8.3 (Der Grad als Homomorphismus)**.** Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\deg\colon \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}, \quad [f] \mapsto \deg(f)$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

(Hinweis: Erinnern Sie sich noch an die Komultiplikation $\gamma\colon S^n \to S^n \vee S^n$ und die Kodiagonale $\nabla\colon S^n \vee S^n \to S^n$? Untersuchen Sie, was diese Abbildungen mit $\widetilde{H}_n(S^n;\mathbb{Z})$ veranstalten.)