Geometrie und Topologie II (WiSe 2020/2021)

— Übungsblatt 9 —

Abgabetermin: Freitag, 8. Januar

Aufgabe 9.1 (Eine Berechnung)**.** Berechnen Sie für $n \geqslant 0$ den Grad der Abbildung $f\colon S^n \to S^n$

$$f\colon S^n \to S^n, \quad f(x,t) = (2tx, 2t^2 - 1)$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $(x,t) \in S^n$.

(Hinweis: Offenbar ist f differenzierbar. Überprüfen Sie, ob der Nordpol $N = (0,\ldots,0,1)$ ein regulärer Wert ist.)

Aufgabe 9.2 (Homologie einfacher Zellkomplexe)**.** Sei $n \geqslant 1$ und $\phi_d\colon S^n \to S^n$ stetig mit $\deg(\phi_d) = d \in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie die gewöhnliche Homologie mit $\mathbb{Z}$–Koeffizienten des Raums

$$X = S^n \cup_{\phi_d} D^{n+1},$$

der aus der Sphäre S^n durch Ankleben der Scheibe D^{n+1} entlang der Abbildung ϕ_d entsteht.

(Hinweis: Der Fall $n = 1$ und $d = 2$ wird ausführlich bei Bredon in Beispiel IV.7.8 behandelt. Verallgemeinern Sie die Argumentation.)

Aufgabe 9.3 (Die Mayer–Vietoris Sequenz)**.**

(a) Gegeben sei ein kommutatives Diagramm Abelscher Gruppen

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & R_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "r_{n+1}", "\cong"'] & C_n \arrow[r, "i_n^A"] \arrow[d, "i_n^B"] & A_n \arrow[r, "k_n^A"] \arrow[d, "j_n^A"] & R_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "r_n", "\cong"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "i_{n-1}^B"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & R'_{n+1} \arrow[r, "\delta'_{n+1}"] & B_n \arrow[r, "j_n^B"] & X_n \arrow[r, "k_n^B"] & R'_n \arrow[r, "\delta'_n"] & B_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

in dem die Zeilen exakt und die Abbildungen r_n Isomorphismen sind. Zeigen Sie, dass die folgende Sequenz exakt ist:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{(i_n^A, i_n^B)} A_n \oplus B_n \xrightarrow{j_n^A - j_n^B} X_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{(i_{n-1}^A, i_{n-1}^B)} \cdots$$

Hierbei ist $\partial_n := \delta_n \circ r_n^{-1} \circ k_n^B$.

(b) Sei X ein topologischer Raum und $A, B \subset X$ mit $X = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$. Konstruieren Sie für jede Homologietheorie Homomorphismen $\partial_{MV}\colon h_n(X) \to h_{n-1}(A \cap B)$, so dass die folgende *Mayer–Vietoris Sequenz* exakt ist:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{MV}} h_n(A \cap B) \xrightarrow{(i_*^A, i_*^B)} h_n(A) \oplus h_n(B) \xrightarrow{j_*^A - j_*^B} h_n(X) \xrightarrow{\partial_{MV}} h_{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{(i_*^A, i_*^B)} \cdots$$

Hierbei sind $i^A\colon A \cap B \hookrightarrow A$ und $j^A\colon A \hookrightarrow X$ die Inklusionen und analog für B.