Geometrie und Topologie II (WiSe 2020/2021)

— Übungsblatt 10 —

Abgabetermin: Freitag, 15. Januar

Konvention: Auf dem gesamten Übungsblatt sei $H_* = H_*(\ ;\mathbb{Z})$ eine gewöhnliche Homologietheorie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, die zusätzlich additiv, konnektiv und kompakt getragen ist (siehe Sitzung 10.1).

Aufgabe 10.1 (Homologie von Produkten)**.**

(a) Sei Y ein Raum mit der Eigenschaft, dass $H_k(Y) \cong \mathbb{Z}^{n_k}$ mit $n_k \geqslant 0$ für $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$H_k(Y \times S^1) \cong H_k(Y) \oplus H_{k-1}(Y)$$

(b) Folgern Sie für den n–dimensionalen Torus:

$$H_k(T^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}} & \text{für } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 10.2 (Komplemente zweier Sphären)**.** Seien $A, B \subset S^n$ mit $A \approx S^p$ und $B \approx S^q$.

(a) Bestimmen Sie $H_*(S^n \backslash (A \cup B))$ für $A \cap B = \varnothing$.

(b) Bestimmen Sie $H_*(S^n \backslash (A \cup B))$ für $A \cap B = \{x\}$ für ein $x \in S^n$.

Aufgabe 10.3 (Invarianz von Gebieten und Randpunkten)**.**

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Zeigen Sie, dass $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen ist.

(b) Sei $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leqslant 0\}$ und $U \subset H^n$ offen. Ferner sei $f \colon U \to H^n$ stetig und injektiv. Zeigen Sie, dass f eine offene Einbettung ist und dass $f(U \cap \{x_1 = 0\}) \subset \{x_1 = 0\}$.

(Bemerkung: Arbeiten Sie in Teil (a) nur mit den Sätzen aus der Vorlesung. Teil (b) ist nahezu identisch mit einer Teilaufgabe aus Geometrie & Topologie I.)