Geometrie und Topologie II (WiSe 2020/2021)

— Übungsblatt 12 —

Aufgabe 12.1 (Zelluläre Homologie von Sphären)**.**

Berechnen Sie den zellulären Komplex der CW Zerlegung von S^n mit Zellen

$$e_i^k = \left\{(x_1, \ldots, x_{k+1}, 0, \ldots, 0) \in S^n \,\middle|\, (-1)^i x_{k+1} > 0\right\}, \quad k = 0, \ldots, n,\ i \in \{0, 1\}$$

und charakteristischen Abbildungen $\Phi_i^k \colon D^k \to S^n$ gegeben durch

$$\Phi_0^k(x_1, \ldots, x_k) = \left(x_1, \ldots, x_k, \sqrt{1 - |x|^2}, 0, \ldots, 0\right) \quad \text{und} \quad \Phi_1^k = -\Phi_0^k.$$

Berechnen Sie $H_*(S^\infty; \mathbb{Z})$ wobei $S^\infty = \bigcup_{n \geqslant 0} S^n$ die unendlich dimensionale Sphäre, topologisiert als Kolimes von S^n ist.[1]

(Bemerkung: Hierbei ist S^k für $k < n$ implizit mit dem Unterraum $S^n \cap \{x_{k+2} = \cdots = x_{n+1} = 0\}$ identifiziert. Die Zellen e_0^k und e_1^k sind gegenüberliegende offene Hemisphären in S^k.)

Aufgabe 12.2 (Natürlichkeit des verbindenden Homomorphismus)**.**

Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "j'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass das nachfolgende Diagramm für jedes $n \in \mathbb{Z}$ kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(B) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "g_*"] & H_n(C) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "h_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(A') \arrow[r, "i'_*"] & H_n(B') \arrow[r, "j'_*"] & H_n(C') \arrow[r, "\partial'_*"] & H_{n-1}(A') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Hierbei sind ∂_* und ∂'_* die verbindenden Homomorphismen der kurzen exakten Zeilen.

Aufgabe 12.3 (Räume mit vorgeschriebener Homologie)**.**

Sei A eine endlich erzeugte Abelsche Gruppe und $n \geqslant 1$. Konstruieren Sie einen Raum X mit

$$\widetilde{H}_i(X; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} A, & i = n \\ 0, & i \neq n. \end{cases}$$

(Hinweis: Ein bekannter Satz aus der Algebra liefert $A \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$ mit $d_i \geqslant 0$.)

[1] Die Homologietheorie $H_*(\ ;\mathbb{Z})$ sei wie in der Vorlesung additiv und kompakt getragen.