Geometrie und Topologie II (WiSe 2020/2021)

— Übungsblatt 13 —

Aufgabe 13.1 (Der Prismenoperator als Kettenhomotopie).

Sei $H\colon X \times I \to Y$ eine Homotopie von $f = H(\cdot, 0)$ zu $g = H(\cdot, 1)$ und $h_n\colon \Delta_n(X) \to \Delta_{n+1}(Y)$ die zugehörige Folge von *Prismenoperatoren* (siehe Vorlesung 13.2). Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 13.2.1, in dem Sie folgende Formel beweisen:

$$\partial_{n+1}^Y h_n + h_{n-1}\partial_n^X = g_\# - f_\#$$

Schreiben Sie dazu die Doppelsummen für $\partial_{n+1}^Y h_n$ und $h_{n-1}\partial_n^X$ aus und identifizieren Sie die Terme wie in der Vorlesung angedeutet.

Aufgabe 13.2 (Explizite baryzentrische Zerlegung).

Sei $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ ein affines n–Simplex in $\mathbb{R}^N$. Für eine geordnete Teilmenge $I = \{i_0, \dots, i_k\}$ von $\{0, 1, \dots, n\}$ mit $0 \leqslant i_0 < \cdots < i_k \leqslant n$ nennt man $\sigma(I) = [v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ eine *k-dimensionale Facette* von σ. Beschreiben Sie die n–Simplizes der baryzentrischen Zerlegung von σ explizit durch die Baryzenter der Facetten. Wie viele n–Simplizes tauchen in der baryzentrischen Zerlegung auf?

Aufgabe 13.3 (Singuläre Homologie von $\mathbb{Q}$).

Berechnen Sie die singulären Homologiegruppen von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $H_1^\Delta(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ frei Abelsch ist und geben Sie eine Basis an.