Proseminar zur Knotentheorie (SS 2019)
— Aufgaben für Sitzung 1: Was ist ein Knoten? —

Was soll das hier mit den Aufgaben? Der Plan ist, jede Woche eine Auswahl an Aufgaben bereit zu stellen, die den Stoff aus dem Vortrag aufgreifen. Diese sollen dann nach dem Vortrag einzeln oder in Gruppen bearbeitet und falls möglich auch besprochen werden. Manchmal, wie zum Beispiel heute, wird es sicherlich mehr Aufgaben geben als sich in 30 Minuten bearbeiten lassen. Jeder kann sich selbst aussuchen, womit er oder sie sich beschäftigen möchte. Die Aufgaben werden in etwa nach Schwierigkeit angeordnet sind. Wer möchte kann die Aufgaben auch gerne zu Hause schriftlich bearbeiten und zur Korrektur abgeben. Das ist allerdings nur ein freiwilliges Angebot.

1 Knoten malen

Aufgabe 1.1. Der beste Weg, um ein Gefühl für Knotendiagramme zu entwickeln, ist es, einige davon zu malen.

(a) Als erstes die zwei Kleeblattknoten, sowohl glatt als auch polygonal.

(b) Das gleiche für die Torusknoten $T_{2,3}$, $T_{2,4}$ und $T_{3,4}$. Wann liegt tatsächlich ein Knoten vor, wann eine Verschlingung?

(c) Und weil es so viel Spaß macht, auch noch ein Paar Brezelknoten $B(p,q,r)$ nach Wahl. Wieder die Frage: wie viele Komponenten liegen vor?

Die Mutigen können versuchen, allgemeine Formeln für die Anzahl der Komponenten von $T_{m,n}$ und $B(p,q,r)$ für beliebige $m,n \in \mathbb{Z}$ bzw. $p,q,r \in \mathbb{Z}$ zu finden.

2 Knoten und Kurven

Vorweg einige Begrifflichkeiten. Unter einer **Kurve** in $\mathbb{R}^n$ verstehen wir eine stetige Abbildung $\kappa\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Eine Kurve κ heißt **einfach**, wenn sie auf $[0,1)$ injektiv ist, und **geschlossen**, wenn $\kappa(1) = \kappa(0)$ gilt. Falls $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ unendlich oft differenzierbar ist, sprechen wir von einer **C^∞ Kurve** oder einer **glatten Kurve**.[1] Eine (nicht notwendigerweise stetige) Abbildung $\lambda\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ heißt **stückweise linear** oder kurz **PL** (= *"pieceswise linear"*) wenn es $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ sowie $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $f(0) = a_1$ und

$$\lambda(t) = a_i + tb_i \quad \text{für alle } t \in (t_{i-1}, t_i] \text{ und } i = 1, \ldots, n.$$

Eine stetige PL Abbildung $\lambda\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ heißt **PL Kurve**.[2]

Aufgabe 1.2 (Knoten als PL Kurven)**.** Im Vortrag wurden Knoten als einfache, geschlossene Polygonzüge in $\mathbb{R}^3$ definiert. Diese Aufgabe zeigt, dass man sich unsere Knoten auch als Bildmengen stetiger, stückweise linearer Abbildungen vorstellen kann.

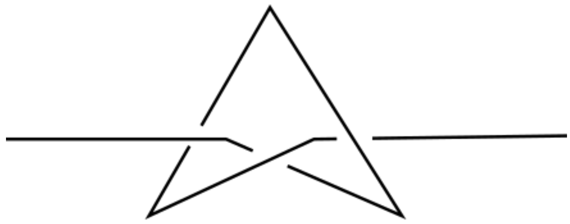
(a) Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ eine einfache, geschlossene PL Kurve. Dann ist das Bild $\gamma([0,1]) \subset \mathbb{R}^3$ ein Knoten.

(b) Für jeden Knoten $K \subset \mathbb{R}^3$ gibt es eine einfache, geschlossene PL Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $K = \gamma([0,1])$. Ein solches γ nennen wir eine **PL Parametrisierung** von K.

Wer mag, darf sich auch Gedanken darüber machen, wie sich verschiedene PL Parametrisierungen eines gegebenen Knotens unterscheiden können.

[1] Für geschlossenene C^∞ Kurven fordern wir zusätzlich, dass alle (linksseitigen) Ableitungen von γ in 1 mit den entsprechenden (rechtsseitigen) Ableitungen in 0 übereinstimmen, das heißt $\gamma^{(n)}(1) = \gamma^{(n)}(0)$ für alle n.

[2] Zur Buchstabenwahl: κ wie κurve, γ wie γlatt und λ wie stückweise λinear.



Aufgabe 1.3 (Ein wilder Knoten)**.** Als nächstes versuchen wir, einen wilden Knoten als Bild einer einfachen, geschlossenen Kurve zu konstruieren.

(a) Zunächst etwas zum warm werden. Wie viele Eckpunkte muss der oben gezeigte Knotenausschnitt mindestens haben?

(b) Genau wie in Aufgabe 1.1(b) kann man eine PL Parametrisierung $\lambda_0\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ des gezeigten Knotenausschnitts finden. Mit Hilfe von abzählbar vielen Kopien dieser Parametrisierung kann man eine einfache geschlossene Kurve $\omega\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ konstruieren, deren Bild das im Buch (Bild 2.2) gezeigte "wilde" Verhalten aufweist. Aber wie?[3]

Aufgabe 1.4 (PL vs. C^∞)**.** Schließlich einige Gedanken über PL Kurven und C^∞ Kurven.

(a) Sei $\lambda\colon [0,1] \to R^3$ eine PL Kurve und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es eine C^∞ Kurve $\gamma_\epsilon\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$, so dass $|\lambda(t) - \gamma_\epsilon(t)| < \epsilon$ für alle $t \in [0,1]$.[4]

(b) Sei umgekehrt $\gamma\colon [0,1] \to R^3$ eine C^∞ Kurve und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es eine PL Kurve $\lambda_\epsilon\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$, so dass $|\gamma(t) - \lambda_\epsilon(t)| < \epsilon$ für alle $t \in [0,1]$.[5]

(c) Angenommen die Kurven γ aus (a) und λ aus (b) sind einfach und geschlossen. Haben die approximierenden Kurven λ_ϵ und γ_ϵ automatisch auch diese Eigenschaften? Und falls nicht, wie kann man das sicherstellen?

Bemerkung: Aufbauend auf diesen Approximationsideen kann man zeigen, dass die "stückweise lineare Knotentheorie", die wir im Seminar behandeln, äquivalent zu einer "differenzierbaren Knotentheorie" ist. Die hauptsächliche Schwierigkeit liegt darin, geeignete Äquivalenzbegriffe für PL Knoten und C^∞ Knoten zu finden, und zu zeigen, dass man durch Approximation von PL nach C^∞ und zurück eine wohldefinierte, bijektive Abbildung zwischen den jeweiligen Äquivalenzklassen von PL und C^∞ Knoten erhält. Dieses Unterfangen ist allerdings etwas aufwendig und für die weitere Entwicklung der Knotentheorie eher zweitrangig. Es ist aber gut und wichtig, zu wissen, dass die prinzipiell schlechte Angewohnheit, in glatten Bildern zu malen und zu denken, aber gleichzeitig polygonale Beweise zu führen, gewissermaßen harmlos ist.

[3] Spoiler: Man kann λ_0 geschickt mit immer kleiner werdenden Kopien von sich selbst verketten.
[4] Spoiler: Man wähle eine genügend feine Partition von $[0,1]$ und interpoliere.
[5] Spoiler: Eventuell kann man die Ecken glatt bügeln?