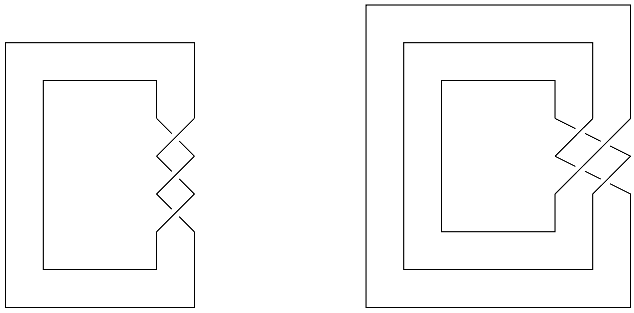
Proseminar zur Knotentheorie (SS 2019)
— Aufgaben für Sitzung 2: Äquivalenz von Knoten? —



Aufgabe 2.1 (Kleeblätter)**.** Um etwas Intuition für äquivalente Knoten zu bekommen, beschäftigen uns etwas mit den abgebildeten Torusknoten $T_{2,3}$ (links) und $T_{3,2}$ (rechts).

(a) $T_{2,3}$ ist äquivalent zu dem rechtshändigen Kleeblattknoten.

(b) $T_{2,3}$ und $T_{3,2}$ sind äquivalent.[1] Tatsächlich sind $T_{m,n}$ und $T_{n,m}$ äquivalent.

Am besten geht so etwas übrigens an der Tafel.

Aufgabe 2.2 (Triviale Knoten)**.** Zu erkennen, ob ein gegebener Knoten zu einem trivialen Knoten äquivalent ist, ist eine zentrale Frage der Knotentheorie. Allgemein ist das schwierig, aber manchmal doch recht einfach.

(a) Ist jeder Knoten mit vier Eckpunkten[2] äquivalent zu einem trivialen Knoten?[3]

(b) Sei K ein Knoten mit maximal fünf Eckpunkten, der in einer Ebene liegt. Dann ist K äquivalent zu einem trivialen Knoten.

Der Satz von Schoenflies besagt, dass (b) auch für beliebig viele Eckpunkte gilt. Der allgemeine Beweis ist allerdings etwas schwieriger.

Aufgabe 2.3 (Drehungen und Verschiebungen)**.** Im Vortrag wurde folgendes besprochen:

> ***Lemma:*** *Sei K ein Knoten, beschrieben durch Stützpunkte $(p_1, \ldots, p_n)$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für alle p_i' mit $|p_i' - p_i| < \epsilon$ durch $(p_1', p_2', \ldots, p_n')$ ein zu K äquivalenter Knoten K' beschrieben wird.*

Diese unscheinbare Aussage ist sehr nützlich, um zu zeigen, dass Knoten, die offensichtlich äquivalent sein sollten, tatsächlich äquivalent im Sinne der formalen Definition sind.

(a) Sei $w \in \mathbb{R}^3$ und $t_w \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $t_w(x) = x + w$. Dann ist $t_w(K)$ ein Knoten, der zu K äquivalent ist.[4]

(b) Ebenso ist für jede Drehung $d \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $d(K)$ wieder ein zu K äquivalenter Knoten gegeben.[5]

Allgemein kann man so zeigen, dass jede winkel- und orientierungserhaltende Transformation von $\mathbb{R}^3$ jeden Knoten in einem Äquivalenten überführt. Überraschenderweise ist dies für Spiegelungen nicht der Fall – mehr dazu später.

---

[1] Spoiler: Es hilft, zunächst den „obersten Strang“ etwas zu bearbeiten.

[2] Zur Erinnerung: die **Eckpunkte** eines Knotens K sind die eindeutige geordnete Menge $(p_1, \ldots, p_n)$ mit der Eigenschaft, dass das keine echte geordnete Teilmenge denselben Knoten definiert.

[3] Spoiler: Man betrachte das Dreieck, dass durch die ersten drei Eckpunkte beschrieben wird.

[4] Spoiler: Es gilt $t_w = (t_{\frac{1}{n}w})^n$. Das Lemma liefert die Behauptung für $t_{w/n}$ für n groß genug.

[5] Spoiler: Man beweise die Aussage zunächst für kleine Drehwinkel und verfahre analog zu (a).