

Proseminar zur Knotentheorie (SS 2019)
— Aufgaben für Sitzung 3: Diagramme und Projektionen —

Aufgabe 3.1 (Einfache Knotendiagramme). Wir betrachten den Polygonzug

$$K = [p_0, p_1] \cup [p_1, p_2] \cup [p_2, p_3] \cup [p_3, p_0]$$

mit den Stützpunkten

$$p_0 = (0, 0, 0), \quad p_1 = (1, 1, z_1), \quad p_2 = (1, 0, z_2), \quad \text{und} \quad p_3 = (0, 1, z_3)$$

wobei $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$ beliebig sind.

- (a) Für welche Werte von z_1, z_2, z_3 ist K ein Knoten? ¹
- (b) Alle dieser Knoten haben die gleiche Projektion. Wie viele verschiedene Knotendiagramme treten auf? Was sind die entsprechenden z -Koordinaten?

Aufgabe 3.2 (Diagramme mit wenigen Überkreuzungen). Die Knotentafel im Anhang enthält keine Diagramme mit ein oder zwei Überkreuzungen. Das legt nahe, dass jeder Knoten, dessen Diagramm weniger als drei Überkreuzungen hat, trivial sein sollte (also äquivalent zu einem Knoten mit drei Eckpunkten).

- (a) Angenommen, das Diagramm von K hat ein oder zwei Überkreuzungen. Dann gibt es einen äquivalenten Knoten, der ein Diagramm ohne Überkreuzungen besitzt.
- (b) Wieso folgt aus (a), dass K trivial ist?

Zur Erinnerung: Aus Aufgabe 2.2 wissen wir, dass jeder Knoten, der in einer Ebene liegt, trivial ist.

¹Die Bedingung $z_1 \neq z_2 \neq z_3$ stellt sicher, dass die Strecken $[p_0, p_1]$ und $[p_2, p_3]$ nicht kollinear sind. (Sporiler: Der Punkt p_1 ist nicht auf der Strecke $[p_2, p_3]$ und umgekehrt.)