

Proseminar zur Knotentheorie (SS 2019)
 — Aufgaben für Sitzung 7: Etikettierungen, Determinante
 und Rang —

Aufgabe 7.1 (Unendlich viele Torusknoten). In dieser Aufgabe benutzen wir die Knotendeterminante, um zu zeigen, dass die Familie von Torusknoten $T_{2,n}$ unendlich viele Knotentypen enthält.

- (a) Man berechne die Determinanten von $T_{2,3}$ und $T_{2,5}$ und stelle eine Vermutung für $T_{2,n}$ für positives, ungerades n auf.
- (b) Man beweise die aufgestellte Vermutung, zum Beispiel mit Induktion.
- (c) Was passiert wenn n negativ ist?

Hinweis: Man sollte die Kreuzungen und Bögen so nummerieren, dass die Matrix nach Streichung einer geeigneten Zeile und Spalte möglichst übersichtlich ist.¹

Aufgabe 7.2 (Der Rang zur Hilfe). Sind die Knoten 8_8 und 9_{49} äquivalent?



Hinweis: Die Determinante hilft nicht, sie ist jeweils 25. Was nun?²

Aufgabe 7.3 (Triviale Probleme). Bei genauerem Hinschauen stellt man fest, dass sich Knotendiagramme mit maximal einer Kreuzung in Bezug auf Determinante und Rang etwas merkwürdig verhalten. Das Problem löst sich in Luft auf, wenn man die richtige Konvention für Determinanten und Rangdefekte von 0×0 Matrizen erkläre. Welche Konvention funktioniert und warum?³

¹Spoiler: Jetzt steht $I - 1$ daneben steht so nummerieren, dass überall 2 auf der Diagonalen und -1 daneben steht

²Spoiler: Man könnte den Rang mod 5 berechnen

³Spoiler: Aufgabe 3.3 verrät, um was für einen Knoten es sich handelt.