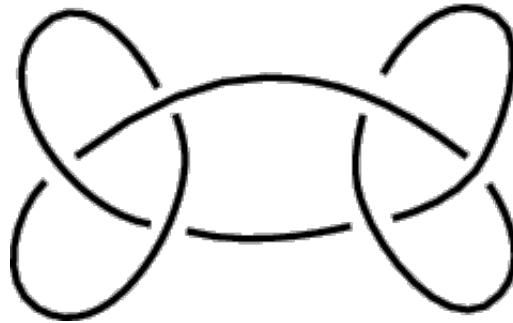


Proseminar zur Knotentheorie (SS 2019)
 — Aufgaben für Sitzung 8: Das Alexander Polynom —



Aufgabe 8.1 (Quadrat und Kleeblatt). Man berechne das Alexander Polynom des Quadratknotens und vergleiche es mit dem des Kleeblattknotens. Was fällt auf?

Aufgabe 8.2 (Alexander und die Determinante). Sei $\Delta(t)$ das Alexander Polynom eines Knotendiagramms und K der zugehörigen Knotentyp.

- (a) Der Wert $|\Delta(-1)|$ stimmt mit der Determinante von K überein.¹
- (b) Die Determinante von K ist ungerade.²

Aufgabe 8.3 (Alexanders Normierung). Sei $\Delta(t)$ das Alexander Polynom eines Knotendiagramms und K der zugehörige Knotentyp. Die störende Diagrammabhängigkeit kann durch eine geeignete Normierungsvorschrift behoben werden. Man zeige:

- (a) Es gibt ein eindeutig bestimmtes Polynom $\Delta_K(t)$, so dass $\Delta(t) = \pm t^k \Delta_K(t)$ und $\Delta_K(0) > 0$ erfüllt sind.³
- (b) Das Polynom $\Delta_K(t)$ ist invariant unter Reidemeister Bewegungen.

Bemerkung. Das Alexander Polynom ist eine sehr vielschichtige Invariante. Es kann auf diverse Arten und Weisen beschrieben werden, die auf den ersten Blick sehr verschieden erscheinen. Der hier besprochene Ansatz hat den Vorteil, mit elementaren Methoden auszukommen. Wie so oft hat das aber gleichzeitig den Nachteil, dass die Konstruktion ohne Vorwissen vom Himmel zu fallen scheint. Um wirklich zu verstehen, was hier passiert, braucht man etwas (algebraische) Topologie, insbesondere die Theorie der Überlagerungen und die Fundamentalgruppe sind relevant.

¹Betrachte die Alexander Matrix bei $t = -1$ und vergleiche mit der Effektivitätsmatrix.
²Kein Knoten ist effektivierbar modulo 2.
³Wenn man nur wüsste, dass $\Delta(t)$ nicht das Nullpolynom ist. . .