

Proseminar zur Knotentheorie (SS 2019)
— Aufgaben für Sitzung 11: Seifert Flächen —



Aufgabe 11.1 (Verdoppeln à la Whitehead). Die Abbildung zeigt das Diagramm einer *Whitehead Verdopplung* eines Kleeblattknotens.

- (a) Welches Geschlecht hat die aus dem Seifert Algorithmus resultierende Seifert Fläche?
- (b) Das geschulte Auge sieht noch eine „offensichtliche“ Seifert Fläche vom Geschlecht 1, bestehend aus einer Scheibe mit zwei angeklebten Bändern. Wer findet sie?¹

Bemerkung: Man kann zeigen, dass dieser Knoten *kein* Diagramm besitzt, für das der Seifert Algorithmus eine Fläche vom Geschlecht 1 liefert.²

Aufgabe 11.2 (Der Highlander unter den Knoten). Wie viele Knoten vom Geschlecht 0 gibt es bis auf Äquivalenz?^{3,4}

Aufgabe 11.3 (Seifert vs. Reidemeister). Wie verhält sich die Anzahl der Seifert Kreise eines orientierten Knotendiagramms unter Reidemeister Bewegungen? Wie sieht es mit dem Geschlecht der entstehenden Seifert Fläche aus?

Zur Bearbeitung: Es müssen nicht alle möglichen Fälle ausführlich aufgeschrieben werden. Bei den Bewegungen der Typen 2 und 3 sollten sich allerdings beim Lösungsversuch gewisse Konfigurationen mit „isolierten Seifert Kreisen“ herauskristallisieren, die interessanter sind als die anderen. Diese sollte man genauer unter die Lupe nehmen.

¹Die Scheibe sollte man im Bereich der obersten zwei Kreuzungen suchen. Spoiler!

²Für Interessierte: <https://mathoverflow.net/questions/54991/whitehead-doubles-of-any-knots>

³Es kann nur einen geben: den Urknoten.

⁴Beweis z. B. per Induktion über die Anzahl von Dreiecken im triangulierten Seifert Flächen. Spoiler!