

# Proseminar zur Knotentheorie

Dr. Stefan Behrens

Sommersemester 2019

## Worum geht es?

Begriffe wie „Knoten“, „verknötet“ oder „etwas entknötet“ wecken wahrscheinlich bei jedem gewisse intuitive Vorstellungen. Aus diesen Vorstellungen ergeben sich unmittelbar einige natürliche Fragen. Ist dieser oder jener Knoten wirklich ernsthaft verknötet? Oder kann man ihn eventuell doch entknötet? Gibt es überhaupt Knoten, die man nicht entknötet kann? Und wenn ja, wie kann man das feststellen? Um derartige Fragen zu beantworten, ist es zunächst nötig, die Intuition über Knoten mathematisch zu formalisieren. Wir orientieren uns dabei an dem Buch „Knotentheorie für Einsteiger“ von Chuck Livingston, das eine intuitive und elementare Einführung in die Theorie bietet, ohne dabei auf mathematische Rigorosität zu verzichten.

Die Knotentheorie ist ein sehr vielseitiges und immer noch aktives Gebiet der Mathematik. Ähnlich wie die Zahlentheorie liefert sie viele interessante Fragestellungen, deren Lösungen oft Methoden aus anderen Bereichen der Mathematik benötigen. Die Grundlagen der Theorie lassen sich allerdings mit relativ elementaren Methoden formulieren. Alle auftretenden geometrischen Objekte sind konkrete und nicht all zu komplizierte Teilmengen des 3-dimensionalen Raums und die Methoden sind vorwiegend kombinatorischer Natur. Nichtsdestotrotz lernt man viele fundamentale Konzepte kennen (z.B. Geschlecht einer Fläche, Euler Charakteristik, Alexander-Polynom).

Das Proseminar bietet somit die Möglichkeit, einen ersten Einblick in Fragestellungen und Herangehensweisen der Geometrie und Topologie zu bekommen, ohne sich über die moderne abstrakte Maschinerie dieser Gebiete Gedanken machen zu müssen.

**Voraussetzungen:** Vertrautheit mit  $\mathbb{R}^3$ , Kenntnisse der linearen Algebra, Spaß und Interesse an geometrischen Denken

**Literatur:** [1] Livingston, Knotentheorie für Einsteiger (Vieweg Verlag, 1995)

**Ansprechpartner:** Dr. Stefan Behrens (sbehrens@math.uni-bielefeld.de, V3-232)

## Vorläufiger Vortragsplan:

**Vortrag 1: Was ist ein Knoten?** ([1], 2.1 – 2.2)

*Termin und Sprecher(in): 10.4.2019*

- Wilde und trivial Knoten
- Die Definition eines Knotens
- Beispiele von Knoten

**Vortrag 2: Äquivalenz von Knoten** ([1], 2.3)

*Termin und Sprecher(in): 17.4.2019*

- Äquivalenz von Knoten und Deformationen
- Konvexe und planare Knoten

**Vortrag 3: Diagramme und Projektionen** ([1], 2.4)

*Termin und Sprecher(in): 24.4.2019*

- Projektionen von Knoten, Existenz regulärer Projektionen
- Knotendiagramme
- Beispiele

- Vortrag 4: Orientierungen** ([1], 2.5)  
*Termin und Sprecher(in): 8.5.2019*
- Orientierte Knoten
  - Umkehrknoten
  - Spiegelbild
- Vortrag 5: Reidemeister Bewegungen** ([1], 3.1)  
*Termin und Sprecher(in): 15.5.2019*
- Reidemeister Bewegungen
  - Äquivalenz und Reidemeister Bewegungen
- Vortrag 6: Färbungen** ([1], 3.2)  
*Termin und Sprecher(in): 22.5.2019*
- Färbungen von Knotendiagrammen
  - Invarianz der Färbbarkeit
  - Der Kleeblattknoten ist nicht trivial, weitere Beispiele nicht trivialer Knoten
- Vortrag 7: Etikettierungen, Determinante und Rang** ([1], 3.4)  
*Termin und Sprecher(in): 29.5.2019*
- Von Knotendiagrammen zu Matrizen
  - Etikettierbarkeit und Etikettierungen modulo  $p$
  - Determinante und Rang modulo  $p$  eines Knotens
  - Unterscheidungen weiterer Knoten
- Vortrag 8: Das Alexander-Polynom** ([1], 3.5)  
*Termin und Sprecher(in): 5.6.2019*
- Die Alexander-Matrix eines Knotendiagramms
  - Das Alexander-Polynom und seine Abhängigkeit vom Knotendiagramm
  - Beispiele
- Vortrag 9: Exkurs über Flächen, Teil 1** ([1], 4.1)  
*Termin und Sprecher(in): 12.6.2019*
- Polyedrische Flächen, Triangulierungen
  - Orientierungen polyedrischer Flächen
  - Homöomorphismen polyedrischer Flächen
- Vortrag 10: Exkurs über Flächen, Teil 2** ([1], 4.2)  
*Termin und Sprecher(in): 19.6.2019*
- Geschlecht und Euler-Charakteristik
  - Die Klassifikation polyedrischer Flächen
- Vortrag 11: Seifert-Flächen und das Geschlecht eines Knotens** ([1], 4.3)  
*Termin und Sprecher(in): 26.6.2019*
- Seifert-Flächen: Definition und Existenzbeweis
  - Das Geschlecht eines Knotens
  - (Chirurgie?)

**Vortrag 12: Zusammenhängende Summen und Primzerlegungen von Knoten** ([1], 4.5)

*Termin und Sprecher(in): 3.7.2019*

- Zusammenhängende Summen
- Primzerlegungssatz
- Additivität des Knotengeschlechts

**Vortrag 13: Seifert-Matrizen, Teil 1**

([1], 6.1 – 6.2)

*Termin und Sprecher(in): 10.7.2019*

- Die Seifert-Matrix einer Seifert-Fläche
- Einige Beispiele
- Das Alexander-Polynom und die Seifert-Matrix

**Vortrag 14: Seifert-Matrizen, Teil 2**

([1], 6.2 – 6.3)

*Termin und Sprecher(in): Vortrag entfällt*

- S-Äquivalenz von Seifert-Matrizen
- Die Signatur eines Knotens und weitere S-Äquivalenzinvarianten

## Allgemeines zum Ablauf des Proseminars

Mathematische Proseminare sind eine schöne Gelegenheit, seinen Horizont über den Stoff der Standardvorlesungen hinaus zu erweitern. Darüber hinaus bieten Sie die Gelegenheit, einmal selbst Dozent zu spielen. Im Unterschiedlich zu einer Vorlesung gibt es keinen festen Dozenten, stattdessen tragen die Studierenden selbst über gewählte Themen vor. Dabei kann man neben interessanter Mathematik auch wichtige Lektionen über das Arbeiten mit Fachliteratur die Kommunikation über Mathematik lernen. Denn anders als man denken mag, lebt die Mathematik davon, dass Mathematiker miteinander reden und versuchen, sich gegenseitig zu verstehen. Es gibt keinen wertvolleren Test des eigenen Verständnisses als der Versuch, anderen etwas zu erklären. Und im Kern ist es das, was in einem Proseminar gefordert ist: etwas verstehen und es anschließend zu erklären.

Aus dieser Beschreibung sollte auch klar sein, dass die Qualität und der Lernerfolg in einem Proseminar mit dem Engagement der Studierenden steht und fällt. Mein Einfluss als Seminarleiter ist eher indirekt und in seiner Auswirkung begrenzt. Ich kann nur hoffen, dass das Thema, das Konzept und meine eigene Motivation dazu beitragen, dass der sagenumwobene Funke überspringt und eine produktive Gruppendynamik entsteht. Ein Proseminar kann sehr viel Spaß machen, aber auch gähnend langweilig sein. Was es letztendlich wird, hat jeder ein Stückchen selbst in der Hand.

### Ablauf der Sitzungen

Jede Sitzung soll aus einem **studentischen Vortrag (60 Minuten)** und einer anschließenden **Diskussion und Gruppenarbeitsphase (30 Minuten)** bestehen. Der Vortrag stellt zunächst ein Thema der Knotentheorie mit den relevanten Definitionen, Sätzen und Beweisen vor. Anschließend sollen Fragen zu dem Vortrag in der Gruppe diskutiert und das Material anhand von Übungsaufgaben in Gruppenarbeit vertieft werden.

### Der eigene Vortrag und die Prüfungsleistung

Die Hauptaufgabe eines Proseminars ist die eigenständige Einarbeitung in ein mathematisches Thema, sowie der Entwurf und die Ausführung eines Vortrags. Zusätzlich sieht die Studienordnung eine schriftliche Prüfungsleistung vor.

**Einarbeitungsphase:** Nachdem man sich für ein Vortragsthema entschieden hat, steht man vor der Aufgabe, sich im wesentlichen selbstständig in die Materie einzuarbeiten. Als Grundlage dient in diesem Seminar das genannte Buch von Chuck Livingston. Weitere Hinweise zu der Arbeit mit der Literatur findet man weiter unten. Bei mathematischen Fragen steht der Seminarleiter jederzeit (nach Absprache) zur Verfügung. Auf keinen Fall sollte man den Fehler machen, zu spät mit der Vorbereitung zu beginnen. Neben einer gewissen Portion Fleiß, braucht Mathematik vor allem Zeit.

**Besprechungstermin:** Um der Arbeit auf den letzten Drücker vorzubeugen, sollte **spätestens 14 Tage vor dem Vortragstermin** eine abschließende Besprechung mit dem Seminarleiter stattfinden, um den endgültigen Inhalt und die Struktur des jeweiligen Vortrags zu besprechen. Bis zu diesem Termin sollte man das Material selbstständig anhand der angegebenen Literatur durchgearbeitet und einen vorläufigen Ablaufplan des Vortrags entworfen haben. Mathematische Detailfragen sollten zu diesem Zeitpunkt idealerweise schon geklärt sein.

**Der Vortrag selbst:** Der Vortrag sollte einen zeitlichen Umfang von **60 Minuten** haben. Dabei sind neben klassischen Tafelvorträgen im Vorlesungsstil auch Beamerpräsentationen möglich. Allerdings sollte man sich bewusst sein, dass sowohl Tafel als auch Beamer vollkommen andere Medien sind als ein Buch. Ausführlicher Fließtext aus einem Buch wirkt in einer Präsentation erschlagend und kostet an der Tafel unnötig Zeit. Die Anpassung des Buchtexts an das jeweils gewählte Medium gehört auch zur Aufgabe der Vortragenden.

**Das Handout:** Zu jedem Vortrag soll es ein schriftliches Handout geben, das kurz und knapp die wichtigen Definitionen, Sätze, Beispiele und Konstruktionen zusammenfasst. Das Handout soll zu Beginn des Vortrags ausgeteilt werden.

**Schriftliche Ausarbeitung:** Jeder Vortrag wird neben dem Haupttext des jeweiligen Kapitels auch ein oder zwei der Übungsaufgaben behandeln im Buch behandeln. Diese sind zusätzlich

zum Handout schriftlich auszuarbeiten und spätestens 21 Tage nach dem Vortragstermin beim Seminarleiter einzureichen.

## **Mitarbeit im Seminar und die Studienleistung**

Neben der Prüfungsleistung sieht die Studienordnung noch eine sogenannte Studienleistung vor. Um diese zu erbringen ist eine nicht näher spezifizierte „aktive Teilnahme am Seminarbetrieb“ gefordert. In diesem Proseminar bieten die Diskussions- und Gruppenarbeitsphasen nach den Vorträgen genügend Möglichkeiten, aktiv teilzunehmen.

## **Zur Arbeit mit der Literatur**

Ein Lernziel von Proseminaren ist die selbstständige Arbeit mit mathematischer Fachliteratur. Dabei sollte man sich bewusst machen, dass ein Buch ein anderes Medium ist als beispielsweise eine Vorlesung. Der größte Unterschied besteht wahrscheinlich darin, dass man in der Vorlesung nachhaken kann und in der Regel eine Antwort bekommt. Ein Buch bleibt stattdessen bei Nachfragen still. Grundsätzlich sollte man sich beim Lesen mathematischer Texte bei jedem Satz fragen, ob man wirklich versteht, was hier gerade passiert. Die Struktur mathematischer Zusammenhänge ist leider meistens sehr viel weniger linear als ein schriftlicher Text. Jeder Text sollte daher nur als ein Versuch des Autors verstanden werden, die Zusammenhänge aus seiner persönlichen Perspektive bestmöglich linear zu approximieren. Nun hat der Leser allerdings die Aufgabe, beziehungsweise den Anspruch, nicht nur den Text, sondern die beschriebenen Zusammenhänge zu verstehen. Und dies ist fast immer eine nicht triviale Rekonstruktionsaufgabe.

## **Mahnende Worte zum Schluss**

Ohne irgendjemandem zu nahe zu treten zu wollen, zum Schluss noch ein Paar mahnende Worte. Auch wenn ein Proseminar idealerweise Spaß machen sollte, ist es keine reine Spaßveranstaltung. Ein Vortrag in einem mathematischen Proseminar an einer Universität ist insbesondere ein anderes Kaliber als ein Referat in der Schule. Die beliebte Strategie, sich am Vorabend des Vortrags die Literatur zu schnappen, noch den ein oder anderen Satz aus Wikipedia zu kopieren, und sich dann damit irgendwie über die Zeit zu retten, ist weder zielführend noch angemessen. Das gleiche gilt dafür, sich nach dem eigenen Vortrag quasi nach vermeintlich getaner aus dem Proseminar auszuklinken. Weder das eigene Studium noch dieses Proseminar sind Pflichtveranstaltungen. Daher sollte ein gewisses Interesse am eigenen Studienfach und dem Thema der Veranstaltung sowie die damit einhergehende Arbeitsbereitschaft selbstverständlich sein. Das Ziel sollte immer sein, etwas zu lernen und seinen Horizont zu erweitern, und nicht in erster Linie das vermeintlich einfache Erreichen von Leistungspunkten. Letzteres passiert erfahrungsgemäß automatisch wenn man Ersteres verfolgt. In diesem Sinne: auf dass dies die einzige Mahnung bleibt und auf ein interessantes und erfolgreiches Proseminar zur Knotentheorie!