

Seminarplan: Seminar zur Morse Theorie

Dr. Stefan Behrens

Wintersemester 2019/2020

Mittwoch, 12 bis 14 Uhr (c.t.), Seminarraum U2–135

Morse Theorie ist ein wichtiges Hilfsmittel, um die Struktur differenzierbarer Mannigfaltigkeiten zu verstehen. Viele bedeutende Fortschritte auf diesem Gebiet beruhen auf Morse Theorie. Hervorzuheben sind insbesondere der Beweis der Poincaré Vermutung in Dimension fünf und höher sowie der eng damit verbundene h -Kobordismussatz. Die Beweismethoden ermöglichen ganz nebenbei relativ anschauliche Beweise für die Klassifikation von ein- und zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Die Idee ist wie folgt: man betrachtet eine sogenannte Morse Funktion auf einer gegebenen Mannigfaltigkeit und stellt sich letztere als Vereinigung der Niveaumengen der Funktion vor. Die regulären Niveaumengen sind wieder Mannigfaltigkeiten, allerdings einer Dimension niedriger, und die verschiedenen Niveaumengen werden durch den Fluss des (bzw. eines) Gradienten der Funktion in Verbindung gesetzt. Man stellt fest, dass die wesentliche Information über die Mannigfaltigkeit darin liegt, was beim Überqueren kritischer Werten der Funktion passiert. So erhält man einen sehr direkten Zugang zur topologischen Struktur der Mannigfaltigkeit.

Ziel des Seminars ist es, zunächst die grundlegenden Methoden der Morse Theorie zu entwickeln, und darauf aufbauend die eingangs erwähnte Anwendungen zu besprechen.

Voraussetzungen: Grundkenntnisse über differenzierbare Mannigfaltigkeiten und Abbildungen sollten idealerweise vorhanden sein. Für die späteren Vorträge ist auch Vorwissen über Homologietheorie hilfreich bis notwendig. Dieses kann parallel in der Vorlesung „Älgebraische Topologie“ (Bauer) erworben werden.

Literatur

- [AD14] M. Audin and M. Damian, *Morse theory and Floer homology*, Universitext, Springer, 2014.
- [BJ82] T. Bröcker and K. Jänich, *Introduction to differential topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [Gra84] A. Gramain, *Topology of surfaces*, BCS Associates, Moscow, ID, 1984.
- [Hir76] M. W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 33, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [Mil65] J. W. Milnor, *Lectures on the h -cobordism theorem*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1965.
- [Nic11] L. I. Nicolaescu, *An invitation to Morse theory*, Second Edition, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2011.
- [Wal16] C. T. C. Wall, *Differential topology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 156, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

Teil I: Morse Funktionen

Im ersten Teil des Seminars wollen wir uns damit beschäftigen, was Morse Funktionen sind, wie sie aussehen, und wie man sie finden kann.

1 Mannigfaltigkeiten (16.10.2019, B.K.)

- ☐ **Differenzierbare Mannigfaltigkeiten und Abbildungen** z.B. [BJ82, Kap. 1]
 - ☐ Grundlegende Definitionen wiederholen
- ☐ **Zerlegungen der Eins** z.B. [BJ82] oder [Hir76]
 - ☐ Definition und Existenzsatz (ohne Beweis)
 - ☐ Einige Anwendungen:
 - ☐ Approximation stetiger Funktionen z.B. [Hir76, Thm. 2.2]
 - ☐ Einbettungen in Euklidische Räume z.B. [Hir76, Thm. 3.4]
 - ☐ Riemann'sche Metriken
- ☐ **Kritische Punkte und reguläre Werte** z.B. [BJ82, Kap. 5]
 - ☐ Definitionen und Beispiele
 - ☐ Höhenfunktionen auf Sphäre und Torus (stehend, gekippt und liegend)
 - ☐ Satz über reguläre Werte als Konsequenz vom Rangsatz (letzterer ohne Beweis)

2 Morse Funktionen I: Eigenschaften (23.10.2019, P.S.)

- ☐ **Definition** [AD14, Kap. 1.1]
 - ☐ Hessesche Bilinearform an kritischen Punkten
 - ☐ Nichtentartete kritische Punkten, Morse Index
- ☐ **Morse Lemma** [AD14, Kap. 1.3]
 - ☐ Parallele zum Satz von Sylvester ziehen
 - ☐ Beweis
 - ☐ Achtung! Wahl der Morse Koordinaten ist nicht eindeutig!
- ☐ **Beispiele** [AD14, Kap. 1.4]
 - ☐ Höhenfunktionen auf Sphäre und Torus
 - ☐ Die Funktion $x^3 - 3sx - |y|^2 + |z|^2$ für festes $s \in \mathbb{R}$

3 Morse Funktionen II: Existenz (30.10.2019, B.K.?)

- ☐ **Existenz regulärer Werte** z.B. [Nic11, Kap. 1.1]
 - ☐ Satz von Sard
 - ☐ Erklärung Nullmengen in Mannigfaltigkeiten
- ☐ **Anwendung auf Morse Funktionen** [AD14, Kap. 1.2] und/oder [Nic11, Kap. 1.2]
 - ☐ Existenz von Morse Funktionen
 - ☐ Morse Funktionen liegen dicht in C^2
 - ☐ Einfache kritische Werte [Nic11, Prop. 1.29]
- ☐ **Dies und jenes:**
 - ☐ Morse Funktionen als Höhenfunktionen [Nic11, Rem. 1.27(a)]
 - ☐ Mehr Beispiele

Teil II: Pseudogradienten

Das wichtigste Hilfsmittel bei der Arbeit mit Morse Funktionen sind spezielle Vektorfelder und ihre Flüsse. Das Studium dieser sogenannten Pseudogradienten, und wie sie ermöglichen komplizierte Mannigfaltigkeiten in einfachere Teile zu zerlegen, ist Inhalt der nächsten Vorträge.

4 Pseudogradienten I: Flüsse (6.11.2019, B.A.)

- ☐ **Pseudogradienten** [AD14, Kap. 2.1.a,c]
 - ☐ Erinnerung: Gradienten auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten
 - ☐ Pseudogradienten für Morse Funktionen, Definition und Konstruktion
- ☐ **Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten** [AD14, Kap. 2.1.d,b]
 - ☐ Erinnerung: Flüsse von Vektorfeldern
 - ☐ Der (negative) Gradientenfluss im Morse Modell
 - ☐ Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten von Pseudogradienten
 - ☐ Asymptotik von Flusslinien
- ☐ **Intervalle regulärer Werte** [AD14, Kap. 2.1.e]
 - ☐ Identifikation der Subniveaumengen
 - ☐ Anwendung: Reeb's Charakterisierung von Spähren

5 Pseudogradienten II: Zellen und die Smale Bedingung (13.11.2019)

- ☐ **Intervalle mit einem einfachen kritischen Wert** [AD14, Kap. 2.1.f]
 - ☐ Ankleben von Zellen, Zellzerlegungen
 - ☐ Retraktionsargument
- ☐ **Die Smale Bedingung** [AD14, Kap. 2.2]
 - ☐ Transversalität und transversale Schnitte
 - ☐ Modulräume verbindender Trajektorien
 - ☐ Existenz von Morse-Smale Pseudogradienten (ggf. Beweisskizze)
- ☐ **Klassifikation kompakter 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten** ... [AD14, Kap. 2.3.a,b]
 - ☐ Morse Funktionen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand
 - ☐ Klassifikationssatz

6 Henkelzerlegungen (20.11.2019, J.K.)

- ☐ **Henkelzerlegungen**
 - ☐ Anatomie von Henkeln, ankleben von Henkeln, Beispiele [Wal16, Kap. 5.1]
 - ☐ Exkurs: Ecken glätten [Wal16, Kap. 2.6]
- ☐ **Morse vs. Henkel**
 - ☐ Henkelzerlegungen aus Morse Funktionen [Wal16, Thm. 5.1.6]
 - ☐ Morse Funktionen auf Henkelkörpern [Wal16, Thm. 5.1.9]

Teil III: Modifikation von Morse Funktionen

Bis hierhin haben wir gelernt, dass wir immer auf jeder Mannigfaltigkeit eine Morse Funktion und einen dazu passenden Pseudogradienten finden können. Außerdem wissen wir schon, dass wir jeden Pseudogradienten dahingehend verbessern können, dass die Smale Bedingung erfüllt ist. Im weiteren Verlauf wird es im wesentlichen darum gehen, in wie fern man eine gegebene Morse Funktion verbessern kann.

7 Umordnung kritischer Werte (27.11.2019)

- ☐ **Zentrales Umordnungslemma**.....[Mil65, Theorem 4.1, p. 37]
 - ☐ Rolle der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten
- ☐ **Disjunktionslemma** [Mil65, Theorem 4.4, p. 40]
 - ☐ Modifikation des Pseudogradienten
 - ☐ Realisierung von Isotopien
- ☐ **Selbstindizierende Morse Funktionen**..... [Mil65, Theorem 4.8, p. 44]

8 Klassifikation von Flächen (4.12.2019, P.S.?)

- ☐ **Flächen**
 - ☐ Beispiele: T^2 , $\mathbb{R}P^2$ und zusammenhängende Summen
 - ☐ Orientierbarkeit und Möbiusbänder [Gra84, Kap. V.§4]
- ☐ **Klassifikation geschlossener Flächen**..... [Gra84, Kap. V]
 - ☐ Vorwegnahme: Elimination lokaler Extrema (ohne Beweis, folgt in Vortrag 10)
 - ☐ Induktion nach Anzahl kritischer Punkte vom Index 1

9 Elimination kritischer Punkte I (11.12.2019, S.B.)

- ☐ **Das Modell**
 - ☐ Die Funktionenfamilie $f_s(x, y, z) = x^3 - 3sx - |y|^2 + |z|^2$, $s \in \mathbb{R}$
 - ☐ Beschreibung des Gradientenflusses
- ☐ **Beweisidee**
 - ☐ Identifikation der Trajektorien im Modell und der Funktion
 - ☐ Fortsetzung der Identifikation auf Umgebungen mittels Fluss
- ☐ **Beweis (Anfang)**
 - ☐ Ein Pseudogradient für das Modell
 - ☐ Konstruktion geeigneter Umgebungen

10 Elimination kritischer Punkte II (18.12.2019, S.B.)

- ☐ **Wiederholung des Problem**
- ☐ **Beweis (Ende)**
 - ☐ Konstruktion geeigneter Karten
 - ☐ Konstruktion der Homotopie
- ☐ **Elimination lokaler Extrema**
 - ☐ Zusammenhangseigenschaften von Subniveaumengen
 - ☐ Anwendung des Eliminationssatzes

Teil IV: Morse Homologie und der h -Kobordismussatz

Im letzten Teil des Seminars nehmen wir Anlauf auf den h -Kobordismussatz. Letzterer liefert eine algebraisch-topologische Bedingung dafür, wann man auf einem Kobordismus eine (Morse) Funktion ohne kritische Punkte finden kann. Das Kernproblem ist es, diese Bedingung mit der geometrischen Voraussetzung für den Eliminationssatz in Verbindung zu bringen. Abgesehen davon müssen wir auch noch die notwendige Sprache entwickeln, um die algebraische Bedingung überhaupt formulieren zu können.

11 Morse Homologie I: Konstruktion (8.1.2020)

- ☐ **Wieso? Weshalb? Warum?**
 - ☐ Notwendig für den h -Kobordismussatz
 - ☐ Modell für “Floer Homologie”
- ☐ **Der Morse Komplex** [AD14, Kap. 3]
 - ☐ Definition des Randoperators ∂
 - ☐ Beweise von $\partial^2 = 0$
 - ☐ Reduktion auf Aussage über gebrochene Flusslinien
 - ☐ Kompaktheit des Raums gebrochener Flusslinien
 - ☐ Mannigfaltigkeitsstruktur gebrochener Flusslinien für Indexdifferenz 2
- ☐ **Beispiele**
 - ☐ $S^2, T^2, \mathbb{R}P^2$

12 Morse Homologie II: Interpretation (15.1.2020)

- ☐ Was ist eigentlich Homologie und was soll das ganze?
- ☐ Zellzerlegungen und zelluläre Homologie
- ☐ Morse Homologie ist zelluläre Homologie [AD14, Kap. 4.9]

13 Der h -Kobordismussatz I (22.1.2020)

- ☐ Schnittzahlen [Mil65, Kap. 6]
- ☐ Der starke Eliminationssatz [Mil65, Thm. 6.4]
- ☐ Der Whitney Trick [Mil65, Thm. 6.6]

14 Der h -Kobordismussatz II (29.1.2020)

- ☐ Der Basissatz [Mil65, Kap. 7]
- ☐ Elimination kritischer Punkte vom Index 1 [Mil65, Kap. 8]
- ☐ Der h -Kobordismussatz [Mil65, Kap. 9]