1. Algebraische Mengen

Sei k ein Körper und n eine natürliche Zahl. Sei $k[T_1, \dots, T_n]$ der Polynomring in n Variablen mit Koeffizienten in k. Ist $P \subseteq k[T_1, \dots, T_n]$, so sei

$$\mathcal{V}_{k^n}(P) = \{a \in k^n \mid f(a) = 0 \text{ für alle } f \in P\};$$

sind $f_1, \dots, f_m \in k[T_1, \dots, T_n]$, so schreiben wir $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_m)$ statt $\mathcal{V}(\{f_1, \dots, f_m\})$. Teilmengen der Form $\mathcal{V}_{k^n}(P)$ mit $P \subseteq k[T_1, \dots, T_n]$ nennt man *algebraische* Teilmengen des k^n.

(1) Skizzieren Sie die Nullstellenmengen $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(f_i)$ für die folgenden Polynome (dabei schreiben wir X statt T_1 und Y statt T_2):

$$\begin{aligned} f_1 &= X^2Y - XY^2 \\ f_2 &= (Y - X^2)(Y - 1) \\ f_3 &= Y - X(X+1)(X-1) \\ f_4 &= Y^2 - X(X+1)(X-1) \end{aligned}$$

Wir fixieren nun k und n und schreiben $\mathcal{V}$ statt $\mathcal{V}_{k^n}$. Sei $R = k[T_1, \dots, k_n]$.

(2) Man zeige:

(a′) Ist $f, g \in R$, so ist $\mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g) = \mathcal{V}(fg)$.

(a) Sind P, P' Teilmengen von R, so gilt

$$\mathcal{V}(P) \cup \mathcal{V}(P') = \mathcal{V}(\{fg \mid f \in P, g \in P'\}).$$

(Die Menge der algebraischen Teilmengen des k^n ist abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen).

(b) Sind $c_1, \dots, c_n \in k$, so ist $\mathcal{V}(T_1 - c_1, \dots, T_n - c_n) = \{(c_1, \dots, c_n)\}$.

(c) Folgerung aus (a) und (b): Jede endliche Teilmenge des k^n ist algebraisch.

(d): Im Fall $n = 2$ beschreibe man explizit eine Teilmenge $P \subseteq R$ mit

$$\mathcal{V}(P) = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}.$$

(3) Man zeige:

(a) Sind $P \subseteq P'$ Untermengen von R, so gilt $\mathcal{V}(P) \supseteq \mathcal{V}(P')$.

(b) Sind Teilmengen P_i von R gegeben, mit $i \in I$ (dabei ist I eine Indexmenge), so ist

$$\mathcal{V}(\bigcup_{i\in I} P_i) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{V}(P_i).$$

(Die Menge der algebraischen Teilmengen des k^n ist abgeschlossen unter beliebigen Durchschnitten.)

(4) Man zeige: Ist $n \geq 1$, so ist die Menge der algebraischen Teilmengen des k^n nicht abgeschlossen unter Vereinigungen.

Übungszettel mit meist 4 Übungsaufgaben werden in der Donnerstagsvorlesung verteilt. Es sollten immer alle Aufgaben bearbeitet werden. Die Aufgaben sind selbständig zu lösen. Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen kurz und prägnant, aber mit vollständigen Zwischentexten, leserlich auf DIN A4-Blätter. Die Aufgaben können in Zweiergruppen bearbeitet und abgegeben werden. Pro Zweiergruppe soll für jede Aufgabe nur eine Lösung abgegeben werden, dabei muß beim Aufschreiben der Lösungen abgewechselt werden. Sofern auf dem Lösungszettel nichts anderes vermerkt ist, wird davon ausgegangen, daß jeder der Beteiligten mit **jeder** der notierten Lösungen vertraut ist und bereit ist, diese vorzuführen.

Abgabe spätestens am folgenden Donnerstag, 12:10 Uhr ins Postfach des Übungsleiters (Karsten Schmidt). Die Lösungen werden in den Übungsstunden der darauffolgenden Woche besprochen.

Für jede vollständig gelöste Aufgabe gibt es 4 Punkte. Für einen Übungsschein (zur Bescheinigung der erfolgreichen Teilnahme) sind 50% der Punkte erforderlich. Wer zuwenige Punkte haben sollte, kann eine mündliche Prüfung über den Stoff der Vorlesung und der Übungen ablegen.

---

2. Algebraische Mengen.

1. Sei M ein topologischer Raum.

(a) Man zeige, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) (Die absteigende Kettenbedingung für abgeschlossene Teilmengen) Ist

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Teilmengen von M, so gibt es ein n mit $A_n = A_{n+1} = \dots$.

(ii) (Die Minimalbedingung für abgeschlossene Mengen) Jede nicht-leere Menge von abgeschlossenen Teilmengen von M besitzt ein minimales Element.

(b) Man zeige: Gelten diese Bedingungen, so ist jede abgeschlossene Teilmenge von M "quasi-kompakt": Sind offene Mengen U_i mit i in einer Indexmenge I gegeben, und gilt $M = \bigcup_{i\in I} U_i$, so gibt es eine endliche Teilmenge $I' \subseteq I$ mit $M = \bigcup_{i\in I'} U_i$.

2. Sei k ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Man zeige: Eine endliche Teilmenge von k^n ist genau dann irreduzibel, wenn sie einelementig ist. (Also gilt: Irreduzible algebraische Mengen sind entweder einelementig oder haben unendlich viele Elemente.)

3. (Klempner-Wissen) Bestimme die irreduziblen Komponenten von

$$\mathcal{V}_{\mathbb{R}^3}(X^2 + Y^2 - 1, Y^2 + Z^2 - 1).$$

(Mit Skizze).

4. Zeige: Das Polynom $f = Y^2 + X^2(X-1)^2 \in \mathbb{R}[X,Y]$ ist irreduzibel, aber $\mathcal{V}(f) \in \mathbb{R}^2$ ist nicht irreduzibel.

3.

1. Sei k ein Körper und sei $n \geq 1$. Ist $F \in k[T_1, \ldots, T_n]$ ein nicht-konstantes Polynom, so nennt man $M = \mathcal{V}(F)$ eine *Hyperfläche* in k^n.

(a) Ist k unendlicher Körper, und ist $M \subset k^n$ eine Hyperfläche, so gibt es außerhalb von M (also in $k^n \setminus M$) unendlich viele Punkte.

(a′) Insbesondere gilt: Ist $M \subset k^n$ eine algebraische Menge, so ist $k^n \setminus M$ eine unendliche Menge.

(b) Ist k algebraisch abgeschlossen und $n \geq 2$, so enthält jede Hyperfläche M in k^n unendliche viele Elemente.

2. Man skizziere die algebraischen Kurven in $\mathbb{R}^2$, die durch die folgenden Gleichungen gegeben sind (dabei achte man insbesondere auf die Punkte in der Nähe der "Singularitäten", also der Punkte, in denen beide partielle Ableitungen der definierenden Polynome verschwinden).

$$\begin{aligned} X^3 - Y^2 &= 0 \\ X^3 + X^2 - Y^2 &= 0 \\ X^3 + X^2 + Y^2 &= 0 \\ X^4 - X^2 + Y^2 &= 0 \\ X^5 + X^4 + Y^2 &= 0 \\ X^6 - X^4 + Y^2 &= 0 \\ (X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2 &= 0 \\ X^n + Y^n - 1 &= 0 \end{aligned}$$

(Manchmal ist es vorteilhaft, die Schnittpunkte der Kurve mit den Geraden $Y = tX$ zu betrachten, um zu einer "Parameterdarstellung" der Kurve zu gelangen.)

3. Zeige: Sei k ein Körper. Ein Gleichungssystem

$$F(X, Y) = 0 \text{ und } G(X, Y) = 0$$

mit zwei teilerfremden Polynomen $F, G \in k[X, Y]$ besitzt höchstens endliche viele Lösungen in k^2.

4. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Seien $p, q \in \mathbb{N}_1$. In k^2 betrachte man die Menge C aller Punkte (t^p, t^q) mit $t \in k$. Zeige: diese Menge C ist eine algebraische Menge und bestimme das Verschwindungsideal $\mathcal{I}(C)$.

4. Ganze Elemente

1. Sei R Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad d. Zeige:

(a) Zu jedem $a \in L$ gibt es $0 \neq r \in R$, so daß ra ganz über R ist.

(b) Es gibt eine K-Basis $a_1, \ldots, a_d$, so daß jedes a_i ganz über R ist.

(c) Sei S der ganze Abschluß von R in L. Dann ist L der (oder besser: 'ein') Quotientenkörper von S.

Warnung: Hat man Elemente $a_1, \ldots, a_d$ wie in (b) gefunden, so wird im allgemeinen der ganze Abschluß S von R in L viel größer als $\sum_{i=1}^{d} Ra_i$ sein. (Siehe Aufgabe 2)

2. Sei $q \in \mathbb{Z}$. Man bestimme den ganzen Abschluß von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}[\sqrt{q}]$.

3. Zeige: Der Ring $R = \mathbb{Z}[X]/\langle X^2+4\rangle$ ist nicht ganz abgeschlossen (insbesondere gibt es also in R keine eindeutige Primfaktorzerlegung).

4. Sei k ein Körper. Zeige direkt (d.h. ohne Verwendung des Nullstellensatzes), daß der Körper $K = k(X)$ der rationalen Funktionen in einer Variablen X als k-Algebra nicht endlich erzeugt ist.

Hinweis: Zeige zuerst, daß es im Polynomring $k[X]$ unendlich viele normierte irreduzible Polynome gibt (genauso, wie man zeigt, daß es unendlich viele Primzahlen gibt ...). Untersuche als nächstes die möglichen Nenner der Elemente einer endlich erzeugten k-Unteralgebra.

5.

1. (a) Sei p eine Primzahl. Bestimmen Sie alle Ideale des Rings $\mathbb{Z}_{(p)}$ aller Brüche $\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}$ und p teilt nicht $b\}$ (dies ist ein Unterring von $\mathbb{Q}$).

(b) Sei k ein Körper und f ein irreduzibles Polynom im Polynomring $k[T]$ Bestimmen Sie alle Ideale des Rings $k[T]_{(f)}$ aller Brüche $\frac{a}{b} \mid a, b \in k[T]$ und f teilt nicht $b\}$ (dies ist ein Unterring von $k(T)$).

2. Sei k ein Körper. Man konstruiere Faktorringe A, B, C des Polynomrings $k[T]$ mit k-Dimension 3, so daß gilt:

(a) A besitzt Nullteiler, aber keine von Null verschiedenen nilpotenten Elemente.

(b) B besitzt von Null verschiedene nilpotente Elemente und alle Nullteiler in B sind nilpotent.

(c) C besitzt Nullteiler, die nicht nilpotent sind, und von Null verschiedene nilpotente Elemente.

3. Ist I ein Ideal des kommutativen Rings R, so sei

$$\sqrt{I} = \{r \mid r^t \in I \text{ für ein } t \in \mathbb{N}\},$$

man nennt dies das *Radikal* des Ideals I.

(a) Man zeige: $\sqrt{I}$ ist ein Ideal, und $R/\sqrt{I}$ besitzt außer 0 keine nilpotenten Elemente.

(b) Sei $z \in \mathbb{Z}$ und $\langle z \rangle$ das von z erzeugte Ideal von $\mathbb{Z}$. Man bestimme $\sqrt{\langle z \rangle}$.

(c) Sei k ein Körper, $f \in k[T]$ und $\langle f \rangle$ das von z erzeugte Ideal von $k[T]$. Man bestimme $\sqrt{\langle f \rangle}$.

4. Zum Noether'schen Normalisierungssatz: Ist die "Normalisierung" eindeutig? Man zeige, daß sie nur dann eindeutig ist, wenn entweder $k \subseteq A$ eine endliche Körpererweiterung oder A ein Polynomring ist. Welche Möglichkeiten gibt es, B zu variieren?

6.

1. Sei k algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige: Zwei algebraische Gleichungssysteme

$$f_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \qquad \text{und} \qquad g_j = 0 \quad (j = 1, \dots, l)$$

in den Variablen $X_1, \dots, X_n$ besitzen genau dann die gleiche Lösungsmenge in k^n, wenn es zu jedem $1 \leq i \leq m$ eine natürliche Zahl ρ_i mit $f_i^{\rho_i} \in \langle g_1, \dots, g_l \rangle$ und zu jedem $1 \leq j \leq l$ eine natürliche Zahl σ_j mit $g_j^{\sigma_j} \in \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ gibt.

2. Sei k ein unendlicher Körper. Zeige, daß man in diesem Fall in der Behauptung des Noether'schen Normalisierungssatzes zusätzlich vorlangen darf, daß die Elemente $b_1, \dots, b_m$ zu dem von den Elementen $a_1, \dots, a_n$ erzeugten k-Unterraum $\sum ka_i$ gehören.

3. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei U ein linearer Unterraum des Vektorraums k^n, sei $v \in k^n$. Erinnerung: Man nennt $U + v$ einen *affinen Teilraum* von k^n.

Zeige: Jeder affine Teilraum $U + v$ ist eine irreduzible algebraische Menge, und die Dimension von $U + v$ (im Sinn der algebraischen Geometrie) ist die Dimension von U (im Sinn der linearen Algebra).

4. Sei R ein Integritätsbereich, sei $K = \mathrm{Quot}(R)$. Ist M eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, die 0 nicht enthält, so sei $R[M^{-1}]$ die Menge der Brüche $\frac{r}{m}$ mit $r \in R, m \in M$; dies ist natürlich ein Unterring von K. Zeige:

(1) Die Zuordnung $J \mapsto J \cap R$ liefert eine Bijektion zwischen der Menge der Ideale von $R[M^{-1}]$ und der Menge der Ideale I von R mit $I \cap M = \emptyset$.

(2) Ist R noethersch, so ist auch $R[M^{-1}]$ noethersch.

(3) Ist P ein Primideal von R und $M = R \setminus P$, so besitzt $R[M^{-1}]$ genau ein maximales Ideal.

7.

1. (a) Bestimmen Sie alle Zahlen $x \in \mathbb{Z}$, die gleichzeitig die folgenden Kongruenzen erfüllen:

$$x \equiv 5 \mod 8, \qquad x \equiv 4 \mod 9, \qquad x \equiv 3 \mod 5.$$

(b) Was würde passieren, wenn wir die zweite Kongruenz durch $x \equiv 4 \mod 16$ ersetzen würden?

2. Zeigen Sie: Der Ring $\mathbb{Z}/3000$ ist zu $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/8 \times \mathbb{Z}/125$ isomorph, nicht jedoch zum Ring $\mathbb{Z}/30 \times \mathbb{Z}/100$.

3. Sei R ein (nicht-notwendig kommutativer) Ring. Zur Erinnerung: Man nennt ein Element $r \in R$ *zentral*, wenn $rr' = r'r$ für alle $r \in R$ gilt. Und man nennt $r \in R$ *idempotent*, wenn $e = e^2$ gilt. Man zeige für $e \in R$ zentral und idempotent:

(a) Die Menge eR ist bezüglich $+$ und $\cdot$ ein Ring mit Einselement e (nach unserer Konvention ist also eR zwar eine Untermenge, die selbst ein Ring ist, aber für $e \neq 1$ **kein** Unterring - denn Unterringe haben das gleiche Einselement).

(b) Es ist auch $1 - e$ zentral und idempotent und der Ring R besitzt die Produktzerlegung $R = eR \times (1-e)R$; das soll heißen: die Zuordnung $r \mapsto (er, (1-e)r)$ liefert einen Ring-Isomorphismus $R \to eR \times (1-e)R$.

4. Sei R ein kommutativer Ring.

(a) Man zeige: Sind die Ideale $I_1, \dots, I_t$ paarweise teilerfremd, so gilt $\cap_{i=1}^t I_i = \prod_{i=1}^t I_i$.

(b) Ist die Abbildung $R \to R/I_1 \times \cdots \times R/I_t$ surjektiv, so sind die Ideale $I_1, \dots, I_t$ paarweise teilerfremd.

5. Seien R und S (nicht-notwendig kommutative) Ringe. Zeige: Ist I ein Ideal von R und J ein Ideal von S, so ist $I \times J$ ein Ideal von $R \times S$ *und man erhält auf diese Weise alle Ideal von* $R \times S$. [Der erste Teil dieser Aussage ist nicht überraschend, der zweite Teil ist zwar ebenfalls einfach zu zeigen, sollte aber irritieren: Denkt man zum Beispiel an einen Körper k und betrachtet $R = S = k$, so besitzt der Ring $k \times k$ genau 4 Ideale; dagegen besitzt der k-Vektorraum k^2 (der sich ja mengenmäßig nicht von $k \times k$ unterrscheidet), immer mindestens 5 Unterräume, ...]

8. Diskrete Bewertungsringe

1. Sei R ein Integritätsbereich, kein Körper. Man zeige, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) R ist noethersch und es gilt: es gibt ein maximales Ideal M, das ein Hauptideal ist und jedes echte Ideal enthält.

(ii) Es gibt ein Element $t \in R$, so daß jedes von Null verschiedene Element $r \in R$ in der Form $z = ut^n$ mit $u \in R$ invertierbar und $n \in \mathbb{N}_0$ schreiben läßt.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind (man nennt dann R einen *diskreten Bewertungsring* und t eine *Uniformisierende*), so gilt zusätzlich: M ist einziges maximales Ideal; die von Null verschiedenen Ideale von R haben die Form M^n mit $n \in \mathbb{N}_0$; das in (ii) gegebene Element t ist ein Primelement; jedes irreduzible Element ist zu t äquivalent; jedes Ideal ist ein Hauptideal; die die in (ii) notierte Darstellung $z = ut^n$ ist eindeutig (d.h.: ist auch $u' \in R$ invertierbar und $m \in \mathbb{N}_0$ mit $ut^n = u't^m$, so ist $u = u'$ und $n = m$.

2. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K; sei M das maximale Ideal von R. Zeige

(a) Ist $0 \neq z \in K$, so ist z oder $z^{-1} \in R$.

(b) Ist $R \subseteq S \subseteq K$ ein Unterring, so ist $S = R$ oder $S = K$.

3. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir betrachten den Körper $k(\mathbb{A}^1) = k(T)$ der rationalen Funktionen auf der affinen Geraden $V = \mathbb{A}^1$, also den Körper der rationalen Funktionen in einer Variablen. Ist $a \in k$, so sei $\mathcal{O}_a(V)$ der Unterring von $k(T)$ aller Brüche f/g mit $f, g \in k[T]$ und $g(a) \neq 0$.

Zeige: $\mathcal{O}_a(V)$ ist ein diskreter Bewertungsring und X ist eine Uniformisierende.

Zeige: Auch $\mathcal{O}_\infty(V) = \{f/g \mid \deg f \leq \deg g\}$ ist ein diskreter Bewertungsring, und $1/X$ ist eine Uniformisierende für $\mathcal{O}_\infty(V)$.

Zeige: Man erhält auf diese Weise alle Unterrringe R von $k(T)$, die k enthalten und diskrete Bewertungsringe sind.

4. Man bestimme alle Unterringe von $\mathbb{Z}$, die diskrete Bewertungsringe sind.

9.

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1. Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n$ und $W \subseteq \mathbb{A}^m$ algebraische Mengen, sei $f\colon V \to W$ ein Morphismus. Man zeige daß $f^*\colon k[W] \to k[V]$ genau dann injektiv ist, wenn $\overline{f(V)} = W$ gilt.

2. Man zeige: Die Hyperbel $V = V(XY-1) \subset \mathbb{A}^2$ ist nicht isomorph zu $\mathbb{A}^1$. (In der Vorlesung wurde gezeigt, daß die Projektionsabbildung $\pi\colon V \to \mathbb{A}^1$ mit $\pi(x,y) = x$ für $x, y \in k$ und $(x,y) \in V$ kein Isomorphismus ist. Hier soll nun gezeigt werden, dass es überhaupt keinen Isomorphismus geben kann.)

3. Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine d-dimensionale algebraische Menge. Zeige: Es gibt einen affinen Unterraum $U \subseteq \mathbb{A}^n$ der Dimension $n-d$, der V in nur endlich vielen Punkten schneidet.

Hinweis: Man verwende Aufgabe 2 vom Übungsblatt 6.

Kann $n-d$ durch $n-d+1$ ersetzt werden?

4. Die Charakteristik von k sei p, eine Primzahl. Man zeige: Die Abbildung $F\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ mit $F(v_1, \dots, v_2) = (v_1^p, \dots, v_n^p)$ (man nennt sie die *Frobenius-Abbildung*) ist ein bijektiver Morphismus, aber für $n \geq 1$ kein Isomorphismus.

10. Homogene Polynome

1. Sei k algebraisch abgeschlossener Körper.

(a) Zeige: Jedes homogene Polynom $F \in k[X, Y]$ läßt sich als Produkt homogener Polynome vom Grad 1 schreiben.

(b) Man faktorisiere die Polynome

$$X^3 - Y^3, \quad X^4 - Y^4, \quad Y^3 - 3X^2Y + 2X^3$$

(dabei kommt möglicherweise die Charakteristik ins Spiel).

2. Sei k ein kommutativer Ring.

(a) Zeige: Ist $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad d und $\lambda \in k$, so gilt

$$F(\lambda X_1, \ldots, \lambda X_n) = \lambda^d F(X_1, \ldots, X_n).$$

(b) Umgekehrt zeige man: Sei k unendlicher Körper, und sei $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom mit folgender Eigenschaft: Für jedes $\lambda \in k$ gilt

$$f(\lambda X_1, \ldots, \lambda X_n) = \lambda^d f(X_1, \ldots, X_n).$$

Dann ist f homogen vom Grad d.

Zurück zur Theorie kommutativer Ringe.

3. Betrachte den Ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Zeige:

(a) Der Ring R ist nicht ganz abgeschlossen (das heißt: der ganze Abschluß von R in $\mathrm{Quot}(R)$ ist ein echter Oberring von R).

(b) Die Elemente $2,\ 3,\ 1+\sqrt{-5},\ 1-\sqrt{-5}$ sind irreduzibel, paarweise nicht assoziiert, und es gilt: $2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5}) \cdot (1-\sqrt{-5})$, demnach ist R kein faktorieller Ring.

(c) Konstruiere ein Ideal I und ein maximales Ideal M mit folgenden Eigenschaften : es ist M das einzige maximale Ideal mit $I \subset M$, andererseits gibt es Ideale J, J', mit $I \subset J \subset M$ und $I \subset J' \subset M$, die unvergleichbar sind (es gilt also weder $J \subseteq J'$, noch $J' \subseteq J$).

2. Sei R ein kommutativer Ring. Ist R noethersch, und I ein Ideal von R, so gibt es Primideale $P_1, \ldots, P_n$ mit $P_1 P_2 \cdots P_n \subseteq I$.

11. Geometrisches

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1. Konstruiere irreduzible Kurven in der Ebene, die den Ursprung enthalten, so daß die Tangenten im Ursprung die Koordinatenachsen und die Diagonale $\mathcal{V}(X-Y)$ sind und alle diese Tangenten die Vielfachheit 2 haben. (Wenn möglich für $k = \mathbb{C}$: Skizze der reellen Punkte ...)

Zeige allgemein: Sind Linearformen $L_j \in k[X,Y]$ mit $1 \leq i \leq j$ gegeben, so gibt es eine irreduzible Kurve f, sodaß die L_j gerade die Tangenten von f im Punkt $(0,0)$ (mit der gegebenen Multiplizität) sind.

Hinweis: Zeige zuerst: Seien $f_m, f_{m+1} \in k[X,Y]$ homogene Polynome vom Grad m bzw. $m+1$, so ist $f_m + f_{m+1}$ irreduzibel.

2. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in k$. Zeige: Die Kurve $f(X,Y) = Y^n - \prod_{i=1}^{t}(X - \lambda_i)$ hat genau dann nur einfache Punkte, wenn die λ_i paarweise verschieden sind.

3. Betrachte die folgenden Kurven und bestimme jeweils die Mehrfachpunkte und die Tangenten in diesen Punkten:

(a) $$Y^3 - Y^2 + X^3 - X^2 + 3Y^2X + 3X^2Y + 2XY$$

(b) $$X^4 + Y^4 - X^2Y^2$$

(c) $$X^3 + Y^3 - 3X^2 - 3Y^2 + 3XY + 1$$

(d) $$Y^2 + (X^2 - 5)(4X^4 - 20\,X^2 + 25)$$

4. Sei $f \in k[X,Y]$ und $p \in k^2$. Zeige: Ist $\operatorname{char} k = 0$, so ist die Multiplizität von f im Punkt p die kleinste Zahl m für die es eine Zerlegung $m = i + j$ mit $\frac{\partial^m f}{\partial X^i \partial Y^j} \neq 0$ gibt. Man gebe eine explizite Beschreibung des Führungsterms von f im Punkt p unter Verwendung dieser partiellen Ableitungen an.

5. Berechne die Schnittzahl

$$I_{(0,0)}((X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3,\ (X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2).$$

12. Moduln

Sei R ein Ring.

1. Sei M ein Modul und $U \subseteq M$ ein Untermodul. Zeige:

(a) Ist M endlich erzeugt, so ist auch M/U endlich erzeugt.

(b) Sind U und M/U endlich erzeugt, so ist auch M endlich erzeugt.

(c) Ist M endlich erzeugt, so braucht U nicht endlich erzeugt zu sein. (Betrachte zum Beispiel den Polynomring $R = k[T_1, T_2, \dots]$ in abzählbar vielen Variablen über einem Körper k, sei $M = {}_RR$ und U der von den Elementen $T_1, T_2, \dots$ erzeugte Untermodul, …).

2. Zeige: Sind U, V Untermoduln des Moduls M, so gibt es einen Isomorphismus $U/(U \cap V) \to (U+V)/V$ (man erhält einen kanonischen Isomorphismus, wenn man sich die Hintereinanderschaltung der Inklusion $U \to M$ und der Projektion $M \to M/V$ anschaut …).

3. Sei k ein Körper und $R = k[T]$ der Polynomring in einer Variablen T. Behauptung: R-Moduln sind "nichts anderes" als Paare (M, ϕ), wobei M ein k-Vektorraum und ϕ: $M \to M$ eine k-lineare Abbildung $M \to M$ ist (nämlich die Multiplikations-Abbildung $T\cdot$). (Zeige dazu: Ist M ein R-Modul, so ist M ein k-Vektorraum und $T\cdot$ ist k-lineare Abbildung $M \to M$; ist umgekehrt M ein k-Vektorraum und ϕ: $M \to M$ ein k-linearer Endomorphismus, so definiere eine Skalar-Multiplikation $R \times M \to M$ durch $(\sum_{i=0}^n c_i T^1, m) \mapsto \sum_{i=0}^n \phi^i(m)$; zu zeigen ist, daß die Modul-Axiome erfüllt sind und daß diese beiden Zuordnungen zueinander invers sind.) Zeige weiter: Unter dieser Zuordnung entsprechen sich Untermoduln und ϕ-invariante Unterräume.

4. Sei wieder k ein Körper und $R = k[T]$ der Polynomring in einer Variablen T. Die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,T}$ ist ein k-linearer Endomorphismus von $k[T]$, demnach können wir das Paar $D = (k[T], \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,T})$ (wie in Aufgabe 3 notiert) als R-Modul auffassen.

(a) Zeige: Der Unterraum P_n der Polynome vom Grad höchstens n ist ein Untermodul von D.

(b) Ist $\operatorname{char} k = 0$, so erhält man auf diese Weise alle echten Untermoduln von D.

(c) Ist $\operatorname{char} k = p$ eine Primzahl, und $n \in \mathbb{N}_0$, so sei U_n der Unterraum von $k[T]$ mit Basis T^{np+i} mit $0 \le i < p$. Zeige: Jedes U_n ist ein Untermodul von D und es gilt $D = \bigoplus_n D_n$.

(d) Vergleiche in beiden Fällen die Menge der Untermoduln von D mit denjenigen von ${}_RR$ und folgere daraus, daß die R-Moduln D und ${}_RR$ nicht zueinander isomorph sein können (obwohl ja die zugrundeliegenden Vektorräume identisch sind).

13. Moduln

1. Betrachte den Modul $M = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. (a) Zeige: Ist $(x_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem und ist I' eine endliche Menge, so ist auch $(x_i)_{i\in I\setminus I'}$ ein Erzeugendensystem.

(b) Sei U der von den Elementen $\frac{1}{p}$ mit p Primzahl erzeugte Untermodul von M, sei P die Menge der Primzahlen. Zeige: Ist p_0 eine Primzahl, so ist $(\frac{1}{p_0})_{p\in P\setminus\{p_0\}}$ kein Erzeugendensystem von U.

2. Sei R ein linksnoetherscher Ring. Man zeige: Ist M ein endlich-erzeugter R-Modul, so ist jeder Untermodul von M ebenfalls endlich-erzeugt.

(Hinweis: Verwende Induktion nach der Erzeugendenanzahl n. Der Fall $n = 1$ sollte problemlos sein. Beim Induktionsschritt verwende man die Aufgabe 12.3.)

3. Betrachte den Ring $R = M(n \times n, k)$ der $(n \times n)$-Matrizen mit Koeffizienten im Körper k. Man bestimme die Untermoduln von ${}_RR$ und zeige, daß alle diese Untermoduln projektiv sind.

4. Betrachte den Ring $R = k[T]/\langle T^n\rangle$. Zeige: Ist U ein Untermodul von R, so ist U nur dann projektiv, wenn $U = R$ oder $U = 0$ gilt.