1.1. Gauß-Lemma. (a) Man zeige: *Sind f, g normierte Polynome in einer Variablen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ und hat $f \cdot g$ Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, so haben f, g Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.*

(b) Man folgere daraus: *Das Minimal-Polynom einer ganzen Zahl hat Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.* (Hinweis: Unter dem Minimal-Polynom einer algebraischen Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ versteht man **das** normierte Polynom f kleinsten Grads in $\mathbb{Q}[X]$, das α als Nullstelle hat — es ist eindeutig bestimmt.)

1.2. Das Standard-Beispiel eines Rings, der nicht normal ist. Sei k ein Körper und R der Unterring des Polynomrings $k[X]$ in einer Variablen, der von X^2 und X^3 erzeugt wird (die Elemente $1, X^2, X^3, X^4, \dots$ bilden eine k-Basis von R). Berechne die Normalisierung R' von R. (Zeige: der Ring $k(X)$ de rationalen Funktionen ist der Quatioentenkörper von R; die Normalisierung R' von R ist die Menge aller Elemente von $k(X)$, die ganz über R sind.)

Zusatz: Es ist $R \simeq k[Y, Z]/(Y^2 - Z^3)$, einen Isomorphismus erhält man durch die Abbildung $\eta\colon k[Y, Z] \to k[X]$ mit $\eta(Y) = X^3$ und $\eta(Z) = X^2$. Für $k = \mathbb{R}$ zeichne man die Kurve $Y^2 = Z^3$.

1.3-4. Quadratische Zahlkörper. Sei d quadratfreie, ganz-rationale Zahl, verschieden von $0, 1$. Sei $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. Man bestimme den Ring $\mathcal{O}_K$ der ganzen Zahlen in K. Zu zeigen ist:

Satz. *Ist $d \equiv 2 \mod 4$ oder $d \equiv 3 \mod 4$, so ist $1, \sqrt{d}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{O}_K$. Ist $d \equiv 1 \mod 4$, so ist $1, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{d})$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{O}_K$.*

Üblicherweise gibt es pro Woche 4 Aufgaben, die Aufgaben werden jeweils am Mittwoch verteilt. Ob es Tutoren gibt, die die Lösungen korrigieren werden, steht noch nicht fest. Die Aufgaben und ihre Lösungen werden auf jeden Fall in den Übungstunden besprochen. Dort sollen auch notwendige Vorkenntnisse (Körpererweiterungen, Separabilität, Primideale) thematisiert werden.