

2.1. Sei d quadratfreie, ganz-rationale Zahl, verschieden von $0, 1$. Sei $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ und $\mathcal{O}_K$ der Ring der ganzen algebraischen Zahlen in K .

Definiere $N = N_K: K \rightarrow \mathbb{Q}$ durch $N(a + b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$. Zeige:

- (a) N liefert einen Gruppen-Homomorphismus $K^* \rightarrow \mathbb{Q}^*$.
- (b) Ist $\alpha \in \mathcal{O}_K$, so ist $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$.
- (c) Gibt es $\alpha \in K$ mit $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$, aber $\alpha \notin \mathcal{O}_K$?

2.2. Sei $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$, also $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ (warum?).

- (a) Zeige: die Zahl 6 besitzt die folgenden beiden Faktorisierungen

$$g = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}).$$

- (b) Die Zahlen 2, 3, $1 + \sqrt{-5}$ und $1 - \sqrt{-5}$ sind irreduzibel in $\mathcal{O}_K$. Hinweis: Verwende die Norm-Abbildung N_K : Jede Faktorisierung von $\alpha \in \mathcal{O}_K$ liefert eine Faktorisierung von $N(\alpha)$ in $\mathbb{Z}$.
- (c) Folgere: Die genannten Elemente 2, 3, $1 + \sqrt{-5}$ und $1 - \sqrt{-5}$ sind zwar irreduzibel, aber keine Primelemente.
- (d) Gesucht sind Elemente $x, y \in \mathcal{O}_K$ mit folgender Eigenschaft: jeder gemeinsame Teiler von x, y ist eine Einheit, es gibt aber keine Elemente $x', y' \in \mathcal{O}_K$ mit $xx' + yy' = 1$.

2.3. Sei K der gleiche Körper wie in Aufgabe 2.2. Betrachte die folgenden Ideale von $R = \mathcal{O}_K$:

$$I = (3, 4 + \sqrt{-5}), \quad I' = (3, 4 - \sqrt{-5}), \quad J = (7, 4 + \sqrt{-5}), \quad J' = (7, 4 - \sqrt{-5}).$$

Zeige: Diese Ideale sind Primideale und es gilt:

$$II' = (3), \quad JJ' = (7), \quad IJ = (4 + \sqrt{-5}), \quad I'J' = (4 - \sqrt{-5}).$$

2.4. Sei $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ mit $d = 2, 3, 5, 6, 7, 10$. Gesucht sind jeweils Einheiten α in $\mathcal{O}_K$ mit $\alpha \neq \pm 1$.