4.1. Ein kommutativer Ring R heißt *lokal,* wenn er ein einziges maximales Ideal besitzt. Zeige: (a) Genau dann ist R lokal, wenn die Menge der nicht-invertierbaren Elemente unter der Addition abgeschlossen ist.

(b) In der Aufgabe 3.4 wurde gezeigt, dass $\mathbb{Z}_{(2)}$ ein lokaler Ring ist. Bestimme alle lokalen Unterringe von $\mathbb{Q}$.

(c) Sei $k[X]$ der Polynom-Ring in einer Variablen über dem Körper k, und $k(X)$ sein Quotientenkörper (der Ring der rationalen Funktionen in einer Variablen X mit Koeffizienten in k). Ist $a \in k$, so zeige, dass

$$k[X]_{(a)} = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in k[X], \text{ mit } g(a) \neq 0 \right\} \subset k(X)$$

ein Unterring von $k(X)$ ist. Zeige ferner, dass dies ein lokaler Ring ist. (Derartige Ringe waren die ersten "lokalen" Ringe, die studiert wurden und sind für die Namensgebung verantwortlich. Warum wohl?)

Zur Erinnerung: Sei R Bereich. Ein Element $x \in R$ heißt *irreduzibel*, wenn es weder Null noch invertierbar ist, und wenn aus der Faktorisierung $x = x_1x_2$ folgt, dass x_1 oder x_2 invertierbar ist. Ein Element $x \in R$ heißt *prim*, wenn es weder Null noch invertierbar ist, und wenn aus $x|yz$ mit $y, z \in R$ folgt, dass $x|y$ oder $x|z$ gilt.

4.2. Zeige: Ist R noetherscher Bereich, und ist $r \in R$ weder Null, noch invertierbar, so lässt sich r als Produkt von irreduziblen Elementen schreiben.

4.3. Sei R ein Bereich und $0 \neq r \in R$. Zeige: Genau dann ist Rr ein Primideal, wenn r prim ist.

4.4. Gesucht sind Elemente in den Ringen

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \quad \mathbb{Z}[\sqrt{-3}], \quad \mathbb{Z}[\sqrt{-4}], \quad \mathbb{Z}[\sqrt{-5}],$$

die irreduzibel, aber nicht prim sind.

Abgabetermin diesmal Mittwoch, 2.5.2007, 8:10, ins Postfach des jeweiligen Tutors.