

Sei K ein Zahlkörper.

7.1. (a) Sei $0 \neq \alpha \in \mathcal{O}_K$. Zeige: Δ_K ist ein Teiler von $\Delta(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$ und

$$\frac{1}{\Delta_K} \Delta(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$$

ist eine Quadratzahl (also das Quadrat einer natürlichen Zahl).

(b) Sei $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathcal{O}_K$ eine $\mathbb{Q}$ -Basis von K . Zeige: Ist $\Delta(\omega_1, \dots, \omega_n)$ quadratfrei, so ist $\omega_1, \dots, \omega_n$ eine Ganzheitsbasis. (Gilt die Umkehrung?)

(c) Sei $\omega_1, \dots, \omega_n$ eine $\mathbb{Q}$ -Basis von K . Zeige: Sind alle $\omega_i \in \mathcal{O}_K$ und ist $\Delta(\omega_1, \dots, \omega_n) = \Delta_K$, so ist $\omega_1, \dots, \omega_n$ eine Ganzheitsbasis. (Kann auf die Voraussetzung $\omega_i \in \mathcal{O}_K$ verzichtet werden?)

7.2. Sei $\alpha \in \mathcal{O}_K$, sei $d = \Delta(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$. Zeige:

$$\mathcal{O}_K \subseteq \mathbb{Z} \frac{1}{d} + \mathbb{Z} \frac{\alpha}{d} + \dots + \mathbb{Z} \frac{\alpha^{n-1}}{d}.$$

Hilfe: Sei $\beta \in \mathcal{O}_K$, schreibe β als Linearkombination der Potenzen α^i mit $0 \leq i \leq n-1$ und Koeffizienten $c_i \in \mathbb{Q}$. Zeige: dc_i ist ganz algebraisch.

7.3. Verwende 7.2 (und die Strukturtheorie der endlich-erzeugten abelschen Gruppen) um zu zeigen: Der Ring $\mathcal{O}_K$ ist noethersch.

7.4. Sei U eine Untergruppe der abelschen Gruppe $(\mathbb{Z}^n, +)$. Für $0 \leq r \leq n$ setze

$$U_r = U \cap (\mathbb{Z}^r \times 0^{n-r}) = \{u = (z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0) \mid z_i \in \mathbb{Z}, u \in U\}.$$

Wir erhalten auf diese Weise eine Inklusionskette:

$$0 = U_0 \subseteq U_1 \subseteq \dots \subseteq U_n = U.$$

Zeige:

(a) Für $1 \leq r \leq n$ gilt: Die Abbildung $\pi_r: U_r \rightarrow \mathbb{Z}$, die durch

$$\pi_r(z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0) = z_r$$

definiert ist, ist ein Gruppen-Homomorphismus mit Kern U_{r-1} .

(b) Es gilt: $\text{Rang } U_{r-1} \leq \text{Rang } U_r \leq \text{Rang } U_{r-1} + 1$ für $1 \leq r \leq n$.

(c) Ist $\text{Rang } U_n = n$, so ist $\text{Rang } U_r = r$ für alle r und $U_{r-1} \subset U_r$ eine echte Inklusion.

(d) Sei nun $\text{Rang } U_n = n$. Wähle $u_r \in U_r \setminus U_{r-1}$ mit $|\pi_r(u_r)|$ minimal (jeweils für $1 \leq r \leq n$). Behauptung: $u_1, \dots, u_n$ ist eine Basis von U .