8.1. Seien $K \subseteq L$ Zahlkörper. Zeige: Jede Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$ lässt sich zu einer Ganzheitsbasis von L fortsetzen.

Hintergrund: Ist V freie abelsche Gruppe mit endlichem Rang und U eine Untergruppe von V, so sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:
(i) V/U ist torsionsfrei.
(ii) Ist $x \in V$ und $0 \neq c \in \mathbb{Z}$ mit $cx \in U$, so ist $x \in U$.
(iii) Es gibt eine $\mathbb{Z}$-Basis $x_1, \dots, x_n$ von V, sodass eine Teilmenge dieser Basis die Untergruppe U erzeugt.
(iv) Jede $\mathbb{Z}$-Basis von U lässt sich zu einer $\mathbb{Z}$-Basis von V fortsetzen.

Man zeige die Äquivalent dieser vier Bedingungen und zeige, dass für die Inklusion $\mathcal{O}_K \subseteq \mathcal{O}_L$ die Bedingung (ii) offensichtlich erfüllt ist.

8.2. Kreisteilungs-Polynome. Das n-te Kreisteilungspolynom $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ ist induktiv durch die Formel

$$X^n - 1 = \prod\nolimits_{d|n} \Phi_d$$

definiert (das Produkt wird über alle natürlichen Zahlen d, die n teilen, gebildet).

Berechne explizit die Kreisteilungspolynome Φ_n mit $1 \leq n \leq 20$.

8.3. Das Eisenstein-Kriterium. (a) Zeige: Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad n und es gebe eine Primzahl p, für die gilt: Es ist $p|a_i$ für $0 \leq i < n$, aber p^2 ist kein Teiler von a_0. Dann ist f irreduzibel.

(b) Sei p Primzahl und Φ_p das zugehörige Kreisteilungspolynom. Zeige, dass man das Eisenstein-Kriterium auf $\Phi_p(X+1)$ anwenden kann und folgere daraus, dass Φ_p irreduzibel ist.

8.4. Sei W die Menge der komplexen Einheitswurzeln, dies ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation. Was lässt sich über die Struktur dieser Gruppe sagen? (zum Beispiel: wie kann man die Menge der Untergruppen beschreiben?)