Kreisteilungskörper.

Sei W_n die Menge der n -ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$. Sei ω_n eine primitive n -te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$.

11.1.

(a) Zeige:

$$\mathbb{Q}[\omega_3] = \mathbb{Q}[\omega_6] = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}].$$

(b) Zeige

$$\mathbb{Q}[\omega_8] = \mathbb{Q}[i, \sqrt{2}].$$

(c) Bestimme alle Unterkörper von $\mathbb{Q}[\omega_8]$.

(d) Es gilt $[\mathbb{Q}[\omega_7]: \mathbb{Q}] = 6 = [\mathbb{Q}[\omega_9]: \mathbb{Q}]$. Sind die Körper $\mathbb{Q}[\omega_7]$ und $\mathbb{Q}[\omega_9]$ isomorph?

11.2. (a) Zeige: Ist $n \geq 3$, so ist $K_n = \mathbb{Q}[\omega_n] \cap \mathbb{R}$ ein Unterkörper von $\mathbb{Q}[\omega_n]$ mit $[\mathbb{Q}[\omega_p]: K_n] = 2$. und jeder Ring-Homomorphismus $\phi: K_n \rightarrow \mathbb{C}$ ist reell (das heißt: $\phi(K_n) \subset \mathbb{R}$.)

(b) Zeige: $K_n = \mathbb{Q}[\omega_n + \omega_n^{-1}]$.

(c) Man gebe Beispiele von Zahlkörpern L an, für die $[L: L \cap \mathbb{R}] > 2$ gilt.

(d) Man gebe Beispiele von Zahlkörpern $K \subseteq \mathbb{R}$ an, für die es nicht-reelle Ring-Homomorphismen $\phi: K_n \rightarrow \mathbb{C}$ gibt.

11.3. Zeige: Ist p eine ungerade Primzahl, so ist W_{2p} die Menge der Einheitswurzeln, die in $\mathbb{Q}[\omega_p]$ liegen.

Hinweis: Einerseits ist die Inklusion $W_{2n} \subset \mathbb{Q}[\omega_p]$ zu zeigen. Umgekehrt zeigt man: Ist n ein echtes Vielfaches von $2p$, so liegt ω_n nicht in $\mathbb{Q}[\omega_p]$.

11.4. In der Vorlesung wird gezeigt werden: Ist p eine ungerade Primzahl, und $\epsilon = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ ist $\mathbb{Q}[\sqrt{\epsilon p}]$ ein Unterkörper von $\mathbb{Q}[\omega_p]$. Man verwende dieses Ergebnis um zu zeigen, dass jeder quadratische Zahlkörper Unterkörper eines Kreisteilungskörpers ist.