13.1. Gauß'sches Reziprozitätsgesetz. Seien p, q ungerade Primzahlen. Man zeige, dass man durch geschicktes Rechnen mit der Gauß'schen Summe

$$\tau = \sum_{(a,p)=1} \left(\frac{a}{p}\right) \omega^a$$

(Berechnen der q-ten Potenz) das Gauß'sche Reziprozitätsgesetz beweisen kann. (Notfalls Literatur heranziehen).

13.2. Dualität abelscher Gruppen. Sei G eine abelsche Gruppe. Die Menge der Gruppen-Homomorphismen $\operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ (mit punktweiter Multiplikation) ist eine abelsche Gruppe, man nennt sie die zu G *duale* Gruppe. Sei nun G endliche abelsche Gruppe. Zeige:

(a) Die Gruppen G und $\operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ sind isomorph.

(b) Verwende (a) um zu zeigen: Es gibt eine Bijektion zwischen den Untergruppen U von G der Ordnung d und den Untergruppen von G der Ordnung $|G|/d$.

13.3. Quickies. Zeige:

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch mit Minimalpolynom f über $\mathbb{Q}$ vom Grad n, seien $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Nullstellen von f (also die zu α konjugierten Elemente). Zeige: Ist r die Anzahl dieser Zahlen α_i, die reell sind, so ist $n - r \equiv 0 \mod 2.$.

(b) Für jeden Zahlkörper K gilt: $\mathcal{O}_K$ hat unendlich viele Primideale.

(c) Sei $L\colon K$ eine galois'sche Erweiterung algebraischer Zahlkörper, sei Q Primideal in L, das über K unverzweigt ist. Zeige: Es gibt genau einen Automorphismus $\phi \in \operatorname{Gal}(L\colon K)$ mit

$$\phi(x) \equiv x^p \mod Q$$

für alle $x \in \mathcal{O}_L$.

(d) Zu jeder endlichen abelschen Gruppe G gibt es eine galois'sche Körpererweiterung $K\colon \mathbb{Q}$ mit $\operatorname{Gal}(K\colon \mathbb{Q}) = G$.

13.4. Zu Kronecker-Weber. Zeige: Ist $K \neq \mathbb{Q}$, so gibt es abelsche Erweiterungen $L\colon K$, die nicht in einem Kreisteilungskörper enthalten sind.

Es genügt, den Fall eines abelschen Körpers K zu betrachten. Warum?.

Die Aufgabe sollte zumindest für den Körper $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ gelöst werden. Hier sucht man eine quadratische (also abelsche) Erweiterung L von $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, sodass $L\colon \mathbb{Q}$ nicht normal ist. Und auch der Fall eines beliebigen Kreisteilungskörpers $K = \mathbb{Q}[\omega_n]$ sollte diskutiert werden: wie findet man eine abelsche Erweiterung $L\colon K$, sodass $L\colon \mathbb{Q}$ nicht abelsch ist.